
1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE



Math.
#3.50

Thomas Taylor

MENELAI

SPHÆRICORUM

LIBRI III.

Quos olim, collatis MSS. *Hebræis* & *Arabicis*, Typis exprimendos curavit Vir Cl. Ed. Halleius L.L.D. R.S.S. & Geometriæ Professor Savil. *Oxoniensis*.

Præfationem addidit
G. COSTARD, A.M.

OXONII,
SUMPTIBUS ACADEMICIS,
M DCC LVIII.

BENEVOLO LECTORI.

EUCLIDEM, qui Mathematicorum Agmen ducit, à Viro Doctiſſimo Davide Gregorio, Aſtronomiæ Profeſſore Saviliano longe Celeberrimo A.D. 1703. editum, ſequebantur Apollonii Pergæi Libri de *Sectione Rationis & Spatii*; quos conclamatos habitos, tandem ex Arabico MS. Latine verterat, ac reſtituerat A.D. 1706, Vir omni Laude major Edm. Halleius, Gregorii Collega conjunctiſſimus. * Anno proxime ſequenti, Auctorem hunc exceperunt Theodoſii Sphærica, quorum Editionem curavit Joſ. Hunt, Collegii Balliolenſis Magiſter Digniſſimus.

Preli Oxonienſis exornandi Studio, ad hunc modum excitato, A.D. 1710 ſequebatur Apollonius Pergæus, cum Pappi Alexandrini Lemmatibus, & Eutocii Aſcalonitæ Commentariis locupletatus. His accedebat Serenus Antiſſenſis de Sectione Cylindri & Coni. Horum Editionem curavit Vir ſummus, ſupra memoratus, Edm. Halleius.

Quo Conſilio, & quibus hortantibus, Opus illud nobile ſuſcepit, ipſe ſatis inter præfandum aperuit. Ejuſdem Studiis & Vigiliis *Menelaum* hunc noſtrum debet Reſpublica Mathematica, quem, (licet eo ipſo curante Typis Academicis *integrum* expreſſum) in Lucem nondum prodiiſ-

* A.D. 1707.

ſe in Cauſa fuiſſe dicitur, quod alium ſimilis Argumenti Auctorem Comitem adjungere in Animo habuiſſet Editor celeberrimus, qui tamen interea Fatis conceſſit, nec ſatis pro comperto habemus quemnam ex Antiquis Mathematicis cum Eo una edendum decreverat.

Optandum foret ut Halleius ipſe (qui ſolus potuit) Erudito Orbi præfando expoſuiſſet quo Conſilio, & quibus Auxiliis Codicum MSS, in Auctore noſtro reſtituendo uſus fuerit, ſed cum hoc Ei per Fata (heu nobis quam luctuoſa!) non licuerit, nos *indignum* rati Geometram adeo inſignem diutius Clauſtris concluſum deliteſcere, atque Orbi Literario *iniquum*, Theſaurum hunc Scriniis noſtris reconditum tamdiu invidiſſe, ſtatuimus *Menelaum*, licet nullo Satellitio ſtipatum, e Clauſtris & Tenebris in Lucem tandem proferendum, omnibus bonarum Artium (præſertim Antiquarum) Cultoribus rem gratam, uti ſperamus, futuram.

Quod ad Auctoris Noſtri Ævum, conſtat eum Anno Trajani Imperatoris primo, ſive a *Chriſto* nato 97, Romæ Sideribus obſervandis vacâſſe. Unde Ptolemæo priorem fuiſſe patet, qui Obſervationes [1] ejus quoque memorat, & cum ſuis confert, & a quo denique, quicquid de Sphæricis Triangulis tradit, hauſiſſe contendit Merſennus. [2]

Præter Libros hos tres, ſex alios *de Subtenſis* ſcripſiſſe fertur, [3] vel Bibliothecis latitantes, Verſionibus ſaltem *Arabicis*, aut *Hebraicis*, vel Temporum Injuria omnino deperditos.

1 Syntax. pag. 170. 171. Edit Baſil. 1538. 2 Præfat. in Menelaum. 3 Ricciol. Almageſt. Nov. in Script. Catalog.

Scripſit

Scripsit quoque de Zodiaci Signis maximo Tempore orientibus, ut testatur *Pappus Alexandrinus*;[4] sed Liber periisse videtur.

Librum insuper *Menelao* tribuit *Abulfaragius*,[5] تمييز الاجرام المختلطة *De Distinctione (Resolutione) Corporum mixtorum*, modo sana sit Lectio, vel non deceptus Auctor, pro Gentis & Sæculi Genio, satis diligens.

An Noster is sit *Menelaus* cujus Mentionem fecit *Plutarchus* in Libello de *Facie in Orbe Lunæ*, non liquet. Ratio sane Temporis & Argumenti minime adversatur.

Textus *Græcus Menelai* intercidit,[6] vel saltem nondum Lucem vidit. Quibus itaque Subsidiis instructus ad Auctorem edendum Noster se accinxit, paucis restat dicendum.

Traductio hæc ex Codice *Hebræo* facta dicitur.[7] Sciendum est itaque, in instructissima Bibliotheca *Bodleiana* servari duos Codices *Hebraice* Manuscriptos, quorum unus in Catalogo est *Hunting*. 6303. 557. Continet *Euclidem*, saltem Libros 6 priores cum 11mo. & 12°. tum Theodosium, Menelaique Sphæricorum Libri primi Partem. Definit enim in Prop. 33. nec quidem eo tenus habet omnes Figuras descriptas, Spatiis nonnullis relictis, iisdem inserendis aptis. Titulum præ se fert ספר מילאוס בתמונות הכדוריות העתקת ר' אסחק בן חנין i. e. *Codex* Menelai *de Figuris Sphæricis ex Versione* R. Isaaci Filii Honaini.

4 Collect. Mathemat. Lib. 6. Prop. 56. 5 Hist. Dyn. p. 42. 6 Vid. Schol. Prop. 12. L. 3. hujus, & Gesner. Bibliothec. p. 510. 7 Vid. Pag. 68. hujus.

Quod

Quod ad Isaacum hunc Honaini Filium, Ætatem ejus ad Sæculum 13 primo retulit *Wolfius.*[8] Sed postea seipsum Erroris arguens, Sæculo 9 vixisse fatetur. "Cum enim, inquit ille, Pater Sæ-" culo 9 medio claruerit, Filium non multo re-" centiorem necesse est." Et recte quidem; nam claruit Pater, Teste *Abulfaragio,*[9] regnante *Motawaccelo*, qui interfectus est An. Heg. 247. (X[ti]. 861.) Duos habuit Filios, Davidem nempe & Isaacum. David Artem medendi professus est; Isaac vero noster وخدم على الترجمة وتولاها واتقنها واحسن فيها وكانت نفسه اميل الى الفلسفة & i. e. vertente Cl. Pocockio,[10] "*Interpre-" tationi inserviit, eique Operam navans, solide opti-" meque præstitit: fuitque Animo in Philosophiam " propensiore.*" Linguam Græcam calluisse non constat. Traductiones itaque suas ex Lingua Arabica, vel Syriaca factas censendum est; quod satis, ut opinor, monere videtur Bartoloccius.[11] "R. Isaac Ben. Honain, inquit, & R. Moses " Ben Samuelis, Ben Judæ, Aben Tibbon, quin-" decim Libros Elementorum Euclidis ex Lingua " Agarenica in Linguam Hebræam transtulerunt, " quos olim Ibn Korra ex Græco Agarenos fece-" rat." Nec contra facit Bar Hebræus,[12] a quo, Patrem ejus Honainum Græce scivisse dicitur, Filio, in hoc Genere Laudis, (modo talem consequutus esset) minime prætereundo.

8 Bibliothec. Heb. Vol. 3. p. 562. 9 Hist. Dyn. p. 171. 10 Hist. Dyn. p. 174. 11 Bibliothec. Rab. Part. 3. pag. 900. 12 Asseman. Bibliothec. Orient. Tom. 2. p. 271. De Librorum Græcorum Interpretibus Arab. præcipue Philosophiam spectantium vid. Hottinger. Smeg. Oriental. L. 3. part. 2. pag. 216. Nec dubitandum est, quin excussis Bibliothecis, alios, & forsan præstantiores invenias.

Codex

Codex alter, & quo, Indiciis quibusdam inductus, Usum præcipue Halleium credo, est in Catalogo, *Hunting*. 6270. 524. & continet *Theodosium*, *Menelaum*, *Thabetem Ebn Korra*, & *Ebn Aphla* de Sphæricis. Scripta duo postrema, Commentarii, vel Supplementi Vices gerunt in priora. Et hæc duo forsan, ob Argumenti Similitudinem vertere, *Menelao*que subtexere, in Animo habuerat Vir ad magna quævis natus Halleius.

De Thabete Ebn Korra [13] monere in Rem erit, insignem eum fuisse Geometram, qui, Teste *Abulfaragio*, [14] multa scripsit in Disciplinis Mathematicis, Medicina, & Logica; de Religione quoque *Sabiorum*, quorum Sectæ Nomen suum dedisse fertur. Gratia multum pollebat apud Imperatorem *Almotadedum*, [15] qui Regnum auspicatus est Ann. Heg. 279. (X[ti]. 892.)

Quo vero Sæculo vixerit (بن افلح) Ebn Aphla non bene liquet, nisi is forsan habendus sit qui Astronomiam, *Mosis Maimonidis* [16] Ævo, nempe circa A.D. 1160 celebrem, *Abulfaragio* [17] Teste, composuit. *Hispanum* الاندلسي vocat, sed an Origine *Hebræus*, an *Arabs*, in Dubio est. Nam de Genere ejus nihil habet *Abulfaragius*, nihil *Bartoloccius*. [18] Judæum vero potius fuisse, *Maimonidis* [19] Auctoritate fretus, inducor ut credam.

13 Natus est An. Heg. 221. (Xti. 835.) mortuus est A. Heg. 288. (900.) 14 Hist. Dyn. p. 184. 15 Abulfarag. Hist. Dyn. p. 178. & Sepher Juchasin p. 156. Colum. 2. Vid. Weidler Hist. Astron. p. 211. Pocock Specim. Hist. Arab. pag. 377. 16 Weidler, Hist. Astron. p. 266. 17 Hist. Dyn. pag. 305. 18 Bibliothec. Rabbin. 19 More Nebuch. Part II. c. IX.

“ Andelo-

"Andelosenos enim, (quos præstantissimos vocat "Mathematicos,) Venerem & Mercurium esse "supra Solem, secundum Principia Ptolemæi, "demonstrasse perhibet. De qua re, inquit, "Librum celebrem conscripsit Ebn Aphlah Hispalensis, cum cujus Filio Familiaritas mihi intercessit." Nullam vero Gratiam, nedum Familiaritatem cum Ishmaelita Judæum inire velle, fidenter statuamus.

Præter Versiones *Menelai*, *Latinam* in Bibliotheca Bod. & alibi conservatam, & *Hebraicam* prædictam, alia insuper *Arabice* extare dicitur, a Thabete Ebn Korra concinnata.[20] Versionem *Arabicam* & vidisse Editorem Cl. & usurpasse,[21] abunde liquet. Inter Mathematicos etiam antiquos, quorum Editionem suscipiendam voluit D. Bernardus, olim Prof. Savil. Oxon. noster fuit *Menelaus*. In quo edendo, MSS. Arab. Seld. & Lat. in Ambul. Bodl. conferenda proposuit.[22] Et duo quidem sunt Codices MSS. in Archiv. Seld. A. N° 5 & 6. Versiones Arabicas *Menelai* complexi, & eorum insuper Tractatuum, quos *Medios* appellarunt Arabes.

Linguis *Hebraica* & *Arabica* minus notis fere conclusum hunc nostrum Auctorem, Mathematicorum Discipulis minus quoque fuisse notum, nemo mirabitur. Sub Literas renascentes, primus, ut videtur, Latine loquentem publice induxit *Maurolycus*, Abbas Messanensis, quem clarissimum Siciliæ Lumen vocat *Ricciolus*.[23] Sed

20 Weidler, ut sup. p. 186. 21 Vid. pag. 15. 23. 38 &c. Huj. 22 Fabrit. Bib. Græc. Vol. 2. pag. 574. 23 Almagest. Nov. Præf. p. 34.

exem-

exemplari Græco, Latino, an Arabico usus sit, non constat. Posterius magis credo. Is enim Cosmographiam edidit A.D. 1543 in cujus Præfatione ad Petrum Bembum Cardinalem scripta, "inter Opera quorum Editionem [24] moliebatur, videre est *Menelai* Sphærica cum *Tebitii* nostrisque (inquit) Additionibus, unde tota sphæralium Triangulorum Scientia scaturit." Sed is *Tebitius* idem videtur cum Thabete Ebn Korra supra laudato, & in Sicilia olim viguisse Linguam Arabicam, notius est quam ut Testes advocemus.

Menelaum postea, simul cum *Theodosii Sphæricis* conjunctum, A.D. 1558 *Messanæ* Typis vulgavit Maurolycus. [25]

Quin *Menelaum*, quem & *Mileum* vocat, iterum A.D. 1644 edidit *Mersennus* in Synopsi sua Mathematica. Quid vero sibi velint quæ Præfatione sequuntur, [26] non bene assequor. "Hos enim, inquit, *Menelai* Libellos, cum ego in antiquis ex Membrana Codicibus invenissem, conatus sum eos, quoniam corruptissimum erat Exemplar, emendare ac restituere; nec non quamplurimis, tum necessariis, tum argutis adaugere Propositionibus." Bene egisset cum Orbe Literato *Mersennus*, modo ubinam Exemplar suum invenisset, aut qua Lingua, *Latine*, vel *Græce*, *Hebraice*, an *Arabice* scriptum dixisset.

In Synopsi sua, nudas tantum Propositiones exhibet *Menelai*, absque ullis omnino Demonstrationibus, nulloque Schemate adjecto. Unde

24 Gesner. Bib. pag. 252. 25 Vid. Weidler, Hist. Astron. pag. 363. 26 Pag. 204.

magis

magis optandum esset, ut Exemplar suum quam fideliter expressisset, nullis Adjectionibus auctum. Hoc enim modo, quid *Menelai* esset melius constaret, a quo, saltem prout nunc damus, tam Propositionum Numero, quam enunciandi Forma, longissime abit: An omnes Libros tres *Menelai* contineret *Mersenni* Exemplar quoque constaret; de quo saltem Suspicio sit, quum Librum secundum, *ex Traditione* Maurolyci, inscribat, duorum reliquorum Traductoris nulla habita Mentione.

Quod vero *Mersennus* ait *Menelaum* aliter *Mileum* appellari, "(& sic vocatur a Luca Gaurico "in Calendario Ecclesiastico novo) metuo, inquit "Vossius, [27] ne Error sit, ac Meleus, vel Mileus, "Compendio Literarum, sive, ut vulgo loquuntur, "Abbreviatura, fuerit exaratum, pro eo quod inte-"gre foret *Menelaus*." Ut ut vero id sit, utrisque Exemplaribus *Hebraicis* prædictis, מילאוס [28] *Mileus*, & מיליאוס [29] *Milieus* dicitur, sive compendio Literarum, in Codicibus Græcis, quibus usi sunt Traductores, id tribuendum sit, sive Orientalium Pronunciationi, & quod ita eorum Aures melius ferrent.

Hæc fere sunt, quæ ut scires, Tua interesse credidimus. Vale, & Conatibus nostris fave.

27 De Mathes. cap. 34. §. 12. 28 Hunting. N°. 16. 29 Hunting. N°. 96. Sed duobus illis Codicibus Arabicis Seld. Nomen plenius effertur مانالاوس *Manalaus*.

MENELAI ALEXANDRINI SPHÆRICORUM

Lib. I.

DEFINITIONES.

I. *Triangulum Sphæricum* eſt ſpatium comprehenſum ſub arcubus circulorum magnorum in ſuperficie Sphæræ.

II. Atque hi arcus, qui ſemper minores ſunt ſemicirculo, dicuntur *latera* vel *crura* Trianguli.

III. *Anguli* autem eorum ſunt anguli quos continent circuli magni in ſuperficie Sphæræ.

IV. Et hi *Anguli æquales* dicuntur, quando inclinantur ad invicem plana arcuum eoſdem continentium æquali inclinatione.

V. Et ſi duorum arcuum plana inclinentur ad invicem majori inclinatione quam duorum aliorum arcuum plana inter ſe, erit angulus ab iiſdem arcubus contentus etiam major.

VI. Et ſi plana arcuum contineant angulum rectum, ipſi arcus etiam dicuntur continere angulum rectum.

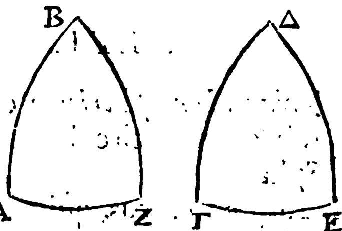
PROP. I. PROBL.

Ad punctum datum in arcu circuli magni dati in superficie Sphæræ, oporteat angulum facere æqualem angulo dato, sub duobus arcubus circulorum magnorum in ea superficie contento.

SIT punctum datum B in superficie data, arcus autem circuli magni dati sit arcus A B, & angulus datus Γ Δ E: & oporteat construere ad punctum B angulum æqualem angulo Γ Δ E.

Describatur polo Δ & quolibet intervallo arcus E Γ, & polo etiam B eodemque intervallo arcus A Z, & capiatur arcus A Z arcui E Γ æqualis, & transeat per duo puncta B, Z arcus circuli magni B Z: dico angulum A B Z angulo Γ Δ E æqualem esse.

Quoniam duo arcus Γ Δ, Δ E sunt arcus circulorum magnorum per polos circuli Γ E transeuntium, utriusque planum [a] secabit circuli Γ E circumferentiam bifariam & ad angulos rectos, adeoque utraque è communibus sectionibus planorum arcuum Γ Δ, Δ E cum plano arcus Γ E transibit per centrum circuli cujus arcus est Γ E; & [b] intersectio communis planorum arcuum Γ Δ, Δ E normalis erit super planum circuli cujus arcus Γ E, & super quamcunque rectam è centro circuli Γ E eductam: adeoque utraque è rectis, quæ ducuntur è punctis Γ, E ad centrum, normalis erit super communem planorum Γ Δ, Δ E intersectionem. Pari modo constabit rectas, à punctis A, Z prodeuntes ad centrum circuli A Z, normales esse super communem planorum A B, B Z sectionem. Et quoniam arcus Γ E descriptus est polo Δ, & intervallo æquali intervallo quo descriptus est arcus A Z polo B, erit circulus cujus arcus est Γ E æqualis circulo cujus arcus est A Z. & arcus Γ E æqualis fit arcui A Z: quare angulus quem subtendit arcus Γ E ad centrum ejus, æqualis est angulo quem subtendit arcus A Z ad centrum ejus. Normales autem duæ prodeuntes ab eodem puncto in communi



a 15. I *Theod.* b 19. XI *Eucl.*

muni ſectione planorum Γ Δ, Δ E in planis Γ Δ, Δ E continent angulum æqualem angulo quem ſubtendit arcus Γ E ad centrum ejus; pariterque normales duæ, prodeuntes ab eodem puncto in communi ſectione planorum A B, B Z in planis A B, B Z, continent angulum æqualem angulo quem ſubtendit arcus A Z ad centrum ejus: igitur normales duæ, prodeuntes ab eodem puncto in communi ſectione planorum Γ Δ, Δ E, in planis Γ Δ, Δ E, continent angulum æqualem angulo contento ſub duabus normalibus ab eodem puncto in communi ſectione planorum A B, B Z in ipſis planis prodeuntibus: ac proinde inclinatio plani circuli A B ad planum circuli B Z æqualis eſt inclinationi plani circuli Γ Δ ad planum circuli Δ E. Anguli autem ſub arcubus circulorum magnorum in ſuperficie ſphæræ contenti (*per def.* 4.) ſunt inter ſe æquales, quum planorum eorundem inclinationes ſunt inter ſe æquales: angulus igitur A B Z æqualis eſt angulo Γ Δ E. Quod erat probandum.

Coroll. Et hinc manifeſtum eſt, ſi conſtituantur ad duo puncta quivis duo anguli contenti ſub duobus circulis in ſphæra magnis, & quolibet dato intervallo deſcripti duo arcus æquales iiſdem ſubtendantur, erunt anguli illi æquales: ac è contra ſi anguli fuerint æquales, æquales erunt quoque arcus.

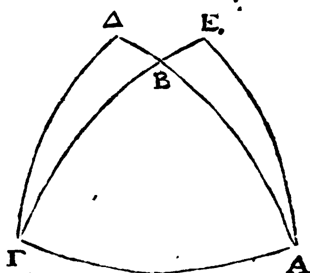
PROP. II. THEOR.

In omni triangulo Sphærico duo crura æqualia habente, erunt duo anguli apud latus tertium æquales.

Sit A B Γ triangulum ſphæricum æquicrure, cujus crura æqualia A B, B Γ: dico duos angulos apud latus A Γ, nempe angulos B A Γ, A Γ B, eſſe inter ſe æquales.

Polo A & intervallo A Γ deſcribatur arcus Γ Δ, & polo Γ eodem intervallo Γ A arcus A E; & producantur arcus A B Δ, Γ B E. Jam quoniam uterque arcus Γ B E, A B Δ æqualis eſt arcui A Γ, & arcus A B æqualis arcui Γ B: erit igitur reliquus arcus B Δ æqualis reliquo B E. Deſcriptus autem eſt arcus Γ Δ polo A, ad intervallum æquale intervallo quo arcus A E polo Γ: erit igitur circulus cujus arcus Γ Δ æqualis circulo cujus arcus A E. Cumque arcus A B Δ tranſit per polos circuli Γ Δ, erit rectus

ſuper illum; pariterque arcus Γ Β Ε rectus ſuper arcum Α Ε. Jam quoniam ſuper duas diametros duorum circulorum æqualium, quorum arcus Α Ε, Γ Δ, ſegmenta erecta ſunt æqualia, à punctis Δ, Ε inchoata, nempe arcus Δ Β Α, Ε Β Γ continuati, in quibus ſumuntur portiones æquales Β Δ, Β Ε minores ſemiſſi eorundem, & recta jungens puncta Β, Γ æqualis eſt jungenti puncta Α, Β: erit (*per* 11. II^di *Theod.*) arcus Γ Δ æqualis arcui Α Ε. Itaque quoniam in ſphærâ duo anguli Β Α Γ, Α Γ Β continentur ſub arcubus circulorum magnorum, & ad duo puncta Α, Γ eodem intervallo deſcripti ſunt duo arcus Γ Δ, Α Ε, ſubtenſi duobus illis angulis, & arcus Γ Δ æqualis eſt arcui Α Ε; erit (per præcedens) angulus Β Α Γ æqualis angulo Α Γ Β. Q. E. D.

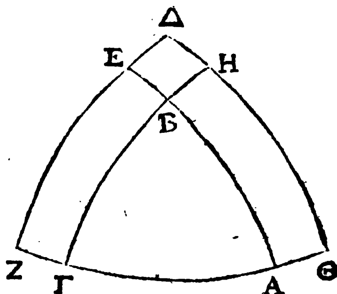


PROP. III. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo anguli fuerint æquales, crura quoque æqualibus angulis oppoſita erunt æqualia.

In triangulo Sphærico Α Β Γ, ſi angulus Α fuerit æqualis angulo Γ: dico arcum Α Β æqualem eſſe arcui Γ Β.

Deſcribantur polis Α, Γ arcus circulorum magnorum Δ Ε Ζ, Δ Η Θ, qui, cum magni ſint, tranſibunt per polum arcus Α Γ; ſitque polus ille arcus Α Γ in Δ; erit igitur arcus Δ Ζ æqualis arcui Δ Θ, arcuſque Α Ε arcui Γ Η. Quoniam vero angulus Α æqualis eſt angulo Γ; & ad duo puncta Α, Γ æquali intervallo deſcripti ſunt arcus Ε Ζ, Η Θ, ſubtenſi duobus illis angulis æqualibus:



erit (*per Coroll.* 1 *hujus*) arcus Ε Ζ æqualis arcui Η Θ: atque adeo reliquus Δ Ε æqualis erit reliquo arcui Δ Η. Circulus autem Α Β Ε tranſit per polum circuli Δ Ε Ζ; erit igitur (*per*

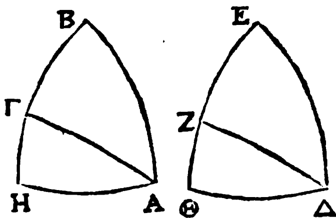
(*per* 15. I. *Theodosii*) arcus ΔEZ rectus super arcum ABE; ac pari modo arcus ΔHΘ rectus est super arcum ΓBH: super diametros igitur circulorum æqualium ABE, ΓBH, ad angulos rectos insistunt segmenta æqualia æqualium circulorum ΔE, ΔH. Communis autem est recta jungens puncta Δ, B; ac proinde (*per* 11^{mam} II. *Theod.*) arcus EB æqualis est arcui BH. Sed arcus AE, ΓH sunt æquales: reliqui igitur AB, BΓ sunt æquales. Q. E. D.

PROP. IV. THEOR.

Si in duobus triangulis Sphæricis angulus aliquis unius æqualis fuerit angulo alterius, arcusque qui continent æquales illos angulos fuerint æquales, singuli singulis; erunt duo reliqui arcus æquales. Quod si duo reliqui arcus fuerint æquales, erunt anguli ab æqualibus arcubus contenti in utroque triangulo æquales.

Sint duo triangula Sphærica ABΓ, ΔEZ; sitque angulus B trianguli ABΓ æqualis angulo E trianguli ΔEZ, & arcus AB æqualis arcui ΔE, arcusque BΓ arcui EZ: dico arcum AΓ æqualem esse arcui ΔZ.

Describatur polo B, intervallo BA, arcus AH; & polo E, intervallo EΔ, arcus ΔΘ. Quoniam angulus B æqualis est angulo E, & arcus AH descriptus est polo B & intervallo eodem quo descriptus est arcus ΔΘ polo E; erit (*per Coroll.* 1. *hujus*) arcus AH æqualis arcui ΔΘ. Quoniam vero arcus BΓ transit per polum arcus AH, erit rectus super illum; pariterque arcus EZ rectus erit super arcum ΔΘ: ob arcum autem BΓ arcui EZ æqualem, & arcum BH ipsi EΘ, (uterque enim æqualis sit ipsi AB) erit arcus reliquus HΓ reliquo ΘZ æqualis. Jam quoniam ad rectos angulos insistunt, super diametros duorum circulorum æqualium, quorum arcus AH, ΔΘ segmenta, æqualia duorum circulorum æqualium, nempe arcus ΘZE, HΓB continuati, & in utroque seg-



ſegmento ſumuntur æquales portiones dimidio eorundem minores, nempe arcus Θ Z, Γ H; & in æqualibus circulis habentur ſegmenta æqualia A H, Θ Δ: erit recta jungens puncta Z, Δ æqualis (*per* 12^{mum} II. *Theod.*) jungenti puncta Γ, A; adeoque arcus Z Δ æqualis arcui Γ A.

Quod ſi fuerit arcus Γ A æqualis arcui Z Δ, erit angulus B æqualis angulo E.

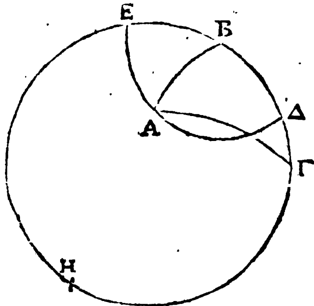
Demonſtratio hujus eſt converſa præcedentis. Nam ſi arcus Z Δ æqualis fuerit arcui Γ A, erit jungens puncta Z, Δ æqualis jungenti Γ, A. Atqui arcus Θ Z æqualis eſt arcui Γ H, quorum uterque rectus eſt ſuper diametrum circuli cui inſiſtit; circuli autem illi ſunt æquales: quare (*per* 11^{mum} II. *Theod.*) arcus Θ Δ æqualis eſt arcui A H, & proinde (*per Coroll.* 1^{mi} *hujus*) angulus E angulo B æqualis. Q. E. D.

PROP. V. THEOR.

Cujuſcunque trianguli Sphærici quilibet duo arcus ſimul ſumpti ſunt majores reliquo.

Sit A B Γ triangulum Sphæricum: dico quod duo quilibet arcus, è tribus A B, B Γ, Γ A ipſum comprehendentibus, ſimul ſumpti ſunt majores reliquo.

Sit B Γ major arcubus reliquis; & polo B, intervallo B A deſcribatur circulus A Δ E, qui occurrat arcui B Γ producto ad E, Δ. Jam quia B polus eſt circuli A Δ E, & arcus B Γ minor eſt ſemicirculo, non erit punctum Γ in polo altero circuli A Δ E. Sit polus ille alter punctum H. Quoniam autem erectum eſt ſuper diametrum circuli A Δ E ſegmentum Δ Γ H à puncto Δ inceptum, & arcus Δ H æqualis eſt arcui H E, quo minor eſt arcus Γ Δ: erit recta quæ à Γ ad Δ ducitur (*per* I. III. *Theod.*) brevior quavis alia à puncto Γ ad peripheriam circuli A Δ E ductâ: juncta igitur Γ A major eſt junctâ Γ Δ; atque adeo arcus A Γ major arcu Γ Δ. Arcus autem A B æqualis eſt arcui B Δ; quare duo arcus B A, A Γ excedunt duos



arcus

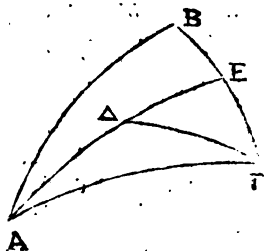
arcus Β Δ, Δ Γ, hoc est Β Γ: quapropter duo quilibet arcus qui comprehendunt triangulum Sphæricum Α Β Γ simul sumpti majores sunt arcu reliquo. Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

Si ab extremitatibus alicujus lateris trianguli Sphærici ducantur duo arcus, concurrentes ad punctum aliquod intra triangulum; arcus illi simul sumpti minores erunt duobus reliquis trianguli lateribus.

Sit Α Β Γ triangulum Sphæricum, & ab extremitatibus arcus Α Γ prodeant duos arcus Α Δ, Δ Γ, concurrentes intra triangulum ad punctum Δ: dico duos arcus Α Β, Β Γ simul sumptos majores esse duobus arcubus Α Δ, Δ Γ simul sumptis.

Producatur arcus Α Δ usque dum concurrat cum arcu Β Γ in puncto Ε; & erunt (*per* 5^{am} *hujus*) arcus Α Β, Β Ε simul sumpti majores arcu Α Ε. Est autem arcus Γ Ε communis: quare duo arcus Α Β, Β Γ simul sumpti excedunt duos arcus Α Ε, Ε Γ simul sumptos. (Sed *per eandem*) arcus Δ Ε, Ε Γ simul excedunt arcum Δ Γ; quare arcus Α Ε, Ε Γ simul excedunt arcus Α Δ, Δ Γ simul sumptos: duo igitur arcus Α Β, Β Γ simul multo majores sunt ipsis Α Δ, Δ Γ simul sumptis. Q. E. D.

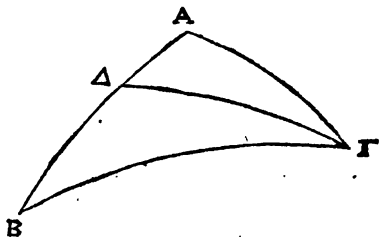


PROP. VII. THEOR.

In omni triangulo Sphærico, si angulus aliquis major fuerit alio; arcus qui subtenditur angulo majori major erit arcu qui subtenditur minori.

Sit Α Β Γ triangulum Sphæricum, cujus angulus Γ major sit angulo Β: dico arcum Α Β majorem esse arcu Α Γ.

Ad punctum Γ cum arcu ΒΓ fiat angulus ΒΓΔ æqualis angulo Β; & erit (*per* 3[am] *hujus*) arcus ΒΔ æqualis arcui ΔΓ: duo igitur arcus ΑΔ, ΔΓ æquales sunt arcui ΑΒ. Sed (*per* 5[tam] *hujus*) arcus ΑΔ, ΔΓ majores sunt arcu ΑΓ: quare arcus ΑΒ major est arcu ΑΓ. Q. E. D.

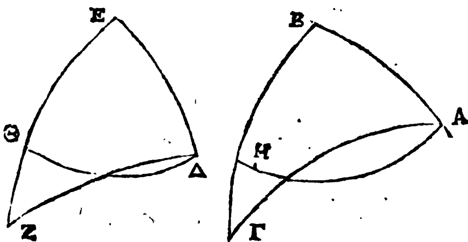


PROP. VIII. THEOR.

Si duo triangula Sphærica habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; angulum autem unius angulo alterius, qui sub æqualibus illis lateribus comprehenditur, majorem: erit arcus qui subtenditur angulo majori major eo qui subtenditur minori; ac si fuerit arcus major, erit etiam angulus major.

Hujus probatio eadem est ac in triangulis rectilineis. Sed & alio modo conficitur ejusdem demonstratio. Sint duo triangula Sphærica ΑΒΓ, ΔΕΖ, sitque arcus ΑΒ æqualis arcui ΔΕ, & arcus ΒΓ arcui ΕΖ: dico quod, si fuerit angulus Β major angulo Ε, erit quoque arcus ΑΓ major arcu ΔΖ; ac si fuerit arcus ΑΓ major arcu ΔΖ, erit etiam angulus Β major angulo Ε.

Polis Β, Ε & intervallis æqualibus ΑΒ, ΔΕ describantur arcus ΑΗ, ΔΘ: cumque arcus ΕΖ æqualis est arcui ΒΓ, & arcus ΒΗ arcui ΕΘ, erit reliquus ΗΓ æqualis reliquo arcui ΘΖ. Quoniam vero segmenta æqualia circulorum æqualium à punctis Η, Θ inchoata, nempe segmenta ΗΓ, ΘΖ continuata, ad angulos rectos insistunt super diametros circulorum æqualium, quorum arcus sunt ΑΗ, ΔΘ, & sumuntur in utroque



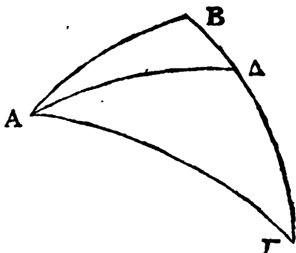
utroque ſegmento arcus æquales minores eorundem dimidiis, nempe arcus Γ H, Z Θ; ob angulum autem B majorem angulo E, arcus Δ Θ minor eſt arcu A H: erit igitur (*per* 1^mam III. *Theod.*) recta jungens puncta Z, Δ minor junctâ A Γ, adeoque arcus A Γ major arcu Δ Z.

Quod ſi fuerit arcus A Γ major arcu Δ Z, pari argumento probabitur quod recta jungens Z, Δ minor eſt jungente puncta A, Γ; unde & arcus Θ Δ minor erit arcu A H, ac proinde angulus B major angulo E. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

In omni triangulo Sphærico major arcus majorem angulum ſubtendit.

Sit A B Γ triangulum Sphæricum, ſitque arcus B Γ major arcu B A: dico quod angulus A major eſt angulo Γ.



In arcu B Γ fiat Γ Δ æqualis arcui A B, & per puncta A, Δ ducatur arcus circuli magni A Δ. Quoniam igitur duo arcus A B, B Δ ſimul ſumpti (*per* 5^tam *huj.*) ſunt majores arcu A Δ, & arcus A B æqualis eſt arcui Δ Γ; erit arcus B Δ Γ major arcu A Δ. Eſt autem arcus Δ Γ æqualis ipſi A B, & A Γ communis; proinde duo arcus Δ Γ, Γ A æquales ſunt duobus B A, A Γ, unuſquiſque relativo ſuo. Baſis autem B Δ Γ major eſt baſi A Δ: quare (*per præced.*) angulus B A Γ major eſt angulo A Γ B. Q. E. D.

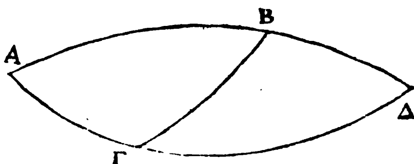
PROP. X. THEOR.

In omni triangulo Sphærico, ſi duo latera ſimul ſumpta æqualia fuerint ſemicirculo; producto reliquo latere, angulus exterior æqualis erit interiori & oppoſito ſuper latus productum. Si vero duo latera ſimul minora ſint ſemicirculo, tum angulus exterior major erit interiore & oppoſito ſuper latus productum. Quod ſi

duo latera simul majora fuerint semicirculo, erit angulus exterior minor interiore sibi opposito.

Sit ΑΒΓ triangulum Sphæricum, & duo latera ejus ΑΒ, ΒΓ simul sumpta sint æqualia semicirculo, & producatur arcus ΑΓ: dico angulum ΒΓΔ exteriorem æqualem esse angulo Α interiori eidemque opposito. Ac si fuerint duo arcus ΑΒ, ΒΓ minores semicirculo, erit angulus ΒΓΔ major angulo Α. Si vero arcus ΑΒ, ΒΓ majores fuerint semicirculo, erit angulus ΒΓΔ minor angulo Α.

Producatur arcus ΑΒ ad occursum arcus ΑΓ, cui conveniat in Δ. Cumque arcus ΑΒ, ΒΓ sint æquales semicirculo, duo autem arcus ΑΒ, ΒΔ sunt etiam æquales semicirculo; erit igitur arcus ΒΔ æqualis arcui ΒΓ, & (*per* 2^dam^ *hujus*) angulus ΒΓΔ angulo ΒΔΓ. Est autem angulus ΒΔΓ æqualis angulo Α; quare angulus ΒΓΔ æqualis est angulo Α.



Sint jam duo arcus ΑΒ ΒΓ simul sumpti minores semicirculo; sunt autem duo arcus ΑΒ, ΒΔ simul æquales semicirculo: quare arcus ΒΔ major est arcu ΒΓ, adeoque (*per* 9^nam^ *hujus*) angulus ΒΓΔ major est angulo Δ. Est autem angulus Δ æqualis angulo Α, eadem enim est inclinatio: quare angulus exterior ΒΓΔ major est interiore Α.

Si vero fuerint duo arcus ΑΒ, ΒΓ simul majores semicirculo: dico angulum exteriorem ΒΓΔ minorem esse angulo interiore Α eidem opposito. Est enim arcus ΑΒΔ semicirculus, ac duo arcus ΑΒ, ΒΓ sunt majores semicirculo; quare arcus ΒΓ major est arcu ΒΔ, ac proinde angulus Δ major est angulo ΒΓΔ. Sed angulus Δ æqualis est angulo Α: angulus igitur ΒΓΔ minor est angulo Α. Q. E. D.

Ac manifesta est hujus conversa: nempe quod si in triangulo Sphærico, producto uno latere, angulus exterior æqualis fuerit interiori & opposito, tum reliqui duo arcus simul sumpti æquantur semicirculo; ac si angulus exterior major fuerit interiore & opposito, erunt reliqui arcus simul minores semicirculo; si vero angulus exterior minor fuerit interiore & opposito, erunt reliqua latera trianguli simul sumpta majora semicirculo.

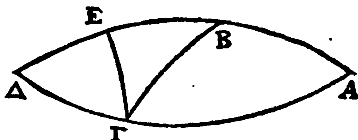
PROP.

PROP. XI. THEOR.

In omni triangulo Sphærico, producto uno latere, angulus exterior minor erit utrisque interioribus eidem oppositis simul sumptis: & tres anguli trianguli simul sumpti majores erunt duobus rectis.

Sit Α Β Γ triangulum Sphæricum: dico quod angulus exterior, arcubus Β Γ, Γ Δ contentus, minor est angulis Α, Β eidem oppositis: quodque tres anguli trianguli Α, Β, Γ simul sumpti excedunt duos angulos rectos.

Fiat ad punctum Γ super arcum Γ Δ angulus Δ Γ Ε æqualis angulo Α, & producatur Α Β ad occursum ipsius Α Γ in puncto Δ. Jam quoniam anguli Δ, Γ sunt æquales, erunt arcus Δ Ε, Ε Γ quoque æquales; & Β Ε, Ε Γ simul sunt æquales arcui Β Δ, ac proinde minores sunt semicirculo: quare (*per præced.*) angulus exterior Γ Β Α major est interiore Β Γ Ε, atque adeo angulus Β Γ Δ exterior trianguli Α Β Γ, minor est angulis Γ Β Α, Β Α Γ simul sumptis. Adjiciatur communis angulus Β Γ Α; & duo anguli Β Γ Δ, Β Γ Α minores erunt angulis Α, Β, Γ. Sed duo anguli Β Γ Δ, Β Γ Α sunt æquales duobus rectis: quare tres anguli Α, Β, Γ simul sumpti excedunt duos rectos. Q. E. D.



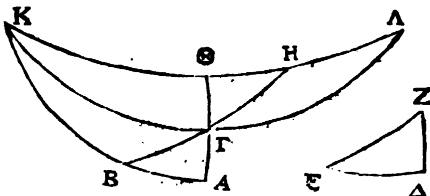
PROP. XII. THEOR.

Si duo triangula Sphærica duos habeant angulos rectos, ac duos alios angulos æquales quidem, sed non rectos; itemque duos arcus angulis rectis subtensos etiam æquales: erunt & duo reliqui anguli æquales, ac reliqua duo latera, in utroque triangulo, singula singulis æqualia.

Sint Α Β Γ, Δ Ε Ζ duo triangula Sphærica, quorum duo anguli Α, Δ recti, duo vero Γ, Ζ æquales, sed non recti; arcus autem Β Γ sit æqualis arcui Ε Ζ: dico arcum Α Γ æqualem esse arcui

arcui Δ Z, & arcum A B arcui Δ E, angulumque B angulo E æqualem.

Producatur B Γ ad H, & fiat Γ H æqualis ipsi B Γ, hoc est ipsi E Z; & producatur A Γ ad Θ, & ponatur Γ Θ ipsi Δ Z æqualis; & descripto circulo magno per puncta H, Θ, producatur usque dum occurrat arcui A B producto in K. Quoniam itaque arcus H Γ est æqualis arcui E Z, & arcus Γ Θ arcui Δ Z, angulusque H Γ Θ angulo Δ Z E (est enim ex hypothesi angulus Δ Z E æqualis angulo A Γ B, cui æqualis est angulus H Γ Θ ad verticem sito) erit igitur (*per* 4^{tam} *hujus*) arcus H Θ æqualis arcui Δ E, & angulus H Θ Γ æqualis angulo Δ. Sed angulus Δ est rectus; quare angulus H Θ Γ est rectus. Et quoniam arcus K Θ H intersecat arcum A Γ Θ ad angulos rectos, transibit (*per* 13^m I. *Theod.*) per polos ejus; sicut & arcus A B K erit per polos ejus: quare punctum K polus est arcus A Γ Θ. Transeat per puncta K, Γ arcus circuli magni, qui producatur ad occursum arcus K Θ H etiam producti in puncto Λ; & erunt utrique arcus Λ Θ K, Λ Γ K semicirculi. Est autem punctum K polus circuli A Γ Θ; quare Λ est polus alter: unde arcus K Γ æqualis est arcui Λ Γ: & arcus H Γ æqualis est arcui Γ B; adeoque duo arcus Λ Γ H Γ æquales sunt duobus K Γ, Γ B, ac angulus H Γ Λ æqualis est angulo K Γ B; quare arcus K B æqualis est arcui Λ H. Verum arcus Λ H Θ æqualis est arcui K B A; reliquus igitur arcus A B æqualis est arcui H Θ. Constat autem arcum H Θ æqualem esse arcui Δ E; quare arcus Δ E æqualis est arcui A B. Porro angulus K B Γ æqualis est angulo Λ H Γ: reliquus igitur angulus A B Γ æqualis est angulo Γ H Θ. Arcus autem H Γ æqualis est arcui Γ B, & arcus H Θ arcui A B; quare arcus A Γ æqualis est arcui Γ Θ. Sed arcus Γ Θ æqualis est arcui Δ Z; quare A Γ æqualis est arcui Δ Z. Demonstravimus autem arcum A B æqualem ipsi Δ E; angulus igitur B æqualis erit angulo E. Q. E. D.



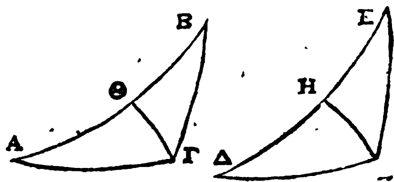
PROP.

PROP. XIII. THEOR.

Si in duobus triangulis Sphæricis, duo anguli æquales fuerint; itemque duo arcus, non continentes angulos illos æquales, unusquisque relativo suo, fuerint æquales; reliqui autem duo anguli non recti [sed uterque vel acutus vel obtusus:] erit arcus reliquus unius æqualis arcui reliquo alterius; & reliqui duo anguli unius reliquis duobus angulis alterius, unusquisque relativo suo, æquales.

In duobus triangulis Sphæricis Α Β Γ, Δ Ε Ζ, sit angulus Α æqualis angulo Δ, & arcus Β Γ arcui Ε Ζ, uti arcus Α Γ arcui Δ Ζ, qui contineant angulos Γ, Ζ æquales; uterque autem reliquus angulus Β, Ε sit recto major vel minor: dico arcum Α Β æqualem esse arcui Δ Ε, angulumq; Γ angulo Ζ, & Β angulo Ε æqualem.

Quoniam angulus Β non est rectus, arcus Β Γ non transibit per polos circuli Α Β. Transeat igitur per punctum Γ, perque polum circuli Α Β arcus circuli magni Γ Θ. Pariterque cum arcus Ζ Ε non transit per polos arcus Ε Δ, transeat per polos ejus punctumque Ζ arcus Ζ Η: erunt igitur anguli Η, Θ recti. Angulus autem Δ non rectus æqualis est angulo Α, sicut arcus Δ Ζ arcui Α Γ: quare (*per* 12^m^ *bujus*) arcus Γ Θ æqualis erit arcui Ζ Η, uti arcus Δ Η arcui Α Θ. Sed & arcus Γ Β æqualis est arcui Ζ Ε, adeoque juncta recta Ζ Ε æqualis est junctæ Γ Β. Insistunt autem super duas diametros circulorum æqualium segmenta æqualia à punctis Θ, Η incœpta, nempe arcus Θ Γ, Η Ζ continuati, in quibus sumuntur portiones æquales minores dimidiis eorundem, nempe arcus Θ Γ, Ζ Η; ac recta jungens puncta Β, Γ æqualis est junctæ Ζ Ε: erit igitur (*per* 11^m^ II. *Theod*) arcus Β Θ æqualis arcui Η Ε. Est autem arcus Δ Η æqualis arcui Α Θ; quapropter arcus Α Β arcui Δ Ε æqualis est. Q. E. D.



Quod si fuerit uterque angulus Α, Δ rectus, transibit arcus Α Γ per polos circuli Α Β, sicut arcus Δ Ζ per polos circuli Ε Δ: insistunt

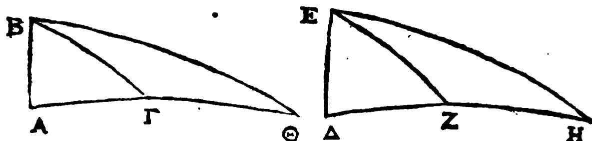
insistunt igitur super diametros circulorum æqualium A B, Δ E segmenta æqualia à punctis A, Δ inchoata, quorum portiones æquales sunt A Γ, Δ Z. Et ob arcum Γ B æqualem arcui Z E, erit juncta recta Γ B æqualis junctæ Z E: quapropter (*per eandem* 11^m II. *Theod.*) arcus A B æqualis est arcui Δ E. Cumque arcus omnes comprehendentes triangula A B Γ, Δ E Z sint inter se æquales, unusquisque relativo suo; manifestum est (*ex* 4ta *hujus*) angulos etiam eorum æquales esse, unumquemque relativo suo. Q. E. D.

PROP. XIV. THEOR.

Si duo triangula Sphærica habeant duos angulos unius duobus angulis alterius æquales, unumquemque suo relativo; itemque arcus, apud quos sunt æquales illi anguli in utroque, æquales: erunt reliqui duo arcus unius æquales duobus reliquis alterius, unusquisque suo relativo, reliquusque angulus angulo reliquo æqualis.

Sint duo triangula Sphærica A B Γ, Δ E Z, quorum angulus Δ sit æqualis angulo A, & angulus Z angulo Γ, arcus autem Δ Z ipsi A Γ æqualis: dico arcum E Δ æqualem esse arcui A B, arcumque Z E arcui Γ B, atque etiam angulum B angulo E.

Vel fuerit uterque angulus A, Δ rectus, vel non. Sint primo recti, & sit punctum Γ polus arcus A B, & erit quoque punctum Z polus arcus Δ E; unde manifestum est arcum Γ B æqualem esse arcui E Z, & arcum A B arcui Δ E. Quod si punctum Γ non fuerit polus arcus A B, neque erit Z polus arcus Δ E. Cum autem angulus A sit rectus, arcus A Γ transibit per polos circuli A B; pro-

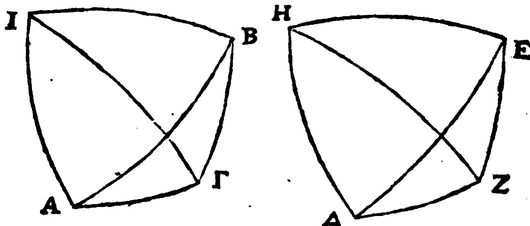


ducatur itaque A Γ ad polum ejus Θ. Pariterque arcus Δ Z productus transibit per polos arcus Δ E; producatur itaque ad polum ejus H; ac ducantur duo arcus quadrantes circulorum magnorum, Θ B, H E. Quoniam vero arcus Θ A æqualis est arcui H Δ, & arcus A Γ arcui Δ Z; ideo reliquus arcus Θ Γ æqualis

erit

erit arcui H Z, ſicut Θ B quadrans quadranti E H: angulus autem A Γ B æqualis eſt angulo Δ Z E: quapropter (*per præcedentem*) arcus B Γ æqualis erit arcui E Z, atque adeo (*per* 12^{m} *hujus*) arcus A B æqualis eſt arcui Δ E, angulusque E angulo B æqualis. Q. E. D.

[a] Quod ſi anguli A, Δ non fuerint recti, manifeſtum eſt arcus A Γ, Δ Z non tranſire per polos arcuum A B, Δ E. Ponamus igitur I polum eſſe circuli A B, & H polum circuli Δ E, per quos polos tranſeant arcus circulorum magnorum quadrantes, A I, B I; H Δ, H E: anguli igitur I A B, I B A; H Δ E, H E Δ ſunt æquales, quippe (*per* 15^{m} I. *Theod.*) recti. Ducantur etiam arcus I Γ, H Z. Quoniam autem angulus B A Γ æqualis eſt angulo



E Δ Z; æqualis erit angulus I A Γ angulo H Δ Z. Et arcus A I æqualis eſt arcui Δ H, ſicut A Γ arcui Δ Z; quare (*per* 4^{m} *hujus*) baſis I Γ æqualis eſt baſi H Z, anguluſque A Γ I angulo Δ Z H. Sed angulus A Γ B æqualis eſt angulo Δ Z E: quare & angulus I Γ B æqualis eſt angulo H Z E. Atqui arcus H Z, H E ſunt æquales ipſis I Γ, I B reſpective, & anguli I B Γ, H E Z ſunt utrique vel obtuſi vel acuti: arcus igitur reliquus E Z (*per præcedentem*) reliquo B Γ æqualis eſt; proinde (*per* 4^{m} *hujus*) arcus E Δ baſis trianguli E Z Δ æqualis eſt arcui A B baſi trianguli B Γ A, uti angulus Δ E Z angulo A B Γ. Q. E. D.

a *N. B. Hanc Propoſitionem in Codicibus* Arabicis *in duas dividi, partemque hanc poſteriorem eſſe XV*cam. *Nos vero hic & in ſequentibus* Hebræi *Codicis numeros retinebimus.*

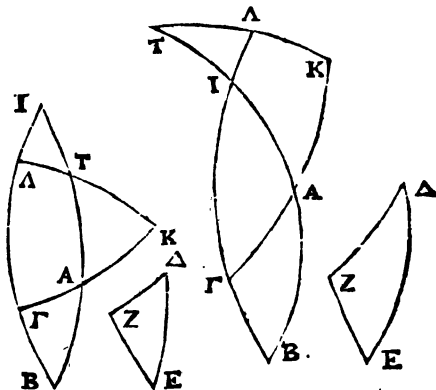
PROP. XV. THEOR.

Si duo triangula Sphærica duos habeant angulos unius æquales duobus angulis alterius, unumquemque relativo ſuo; latera vero reliquos angulos in utroque continentia æqualia, unumquodque ſuo relativo; ac non fuerint Poli reliquorum

liquorum arcuum apud angulos illos reliquos: erunt quoque latera reliqua æqualia.

Sint Α Β Γ, Δ Ε Ζ duo triangula Sphærica, & æquales sint duo anguli unius, nempe anguli Α, Γ in triangulo Α Β Γ, angulis Δ,Ζ trianguli Δ Ε Ζ; sintque latera angulos Β,Ε continentia etiam æqualia, nempe arcus Ε Ζ arcui Β Γ, & arcus Δ Ε arcui Α Β; nec sint puncta Β, Ε poli arcuum Α Γ, Δ Ζ: dico arcum Δ Ζ æqualem esse arcui Α Γ.

Producantur arcus Α Β, Β Γ ad occursum in puncto Ι. Cumque ex hypothesi punctum Β non sit in polo arcus Α Γ, sit Α Β in primâ figura minor, in secundâ major quadrante circuli. In producto arcu Α Β fiat arcus Α Τ arcui Δ Ε æqualis, hoc est ipsi Α Β, ac manifestum erit arcum Α Τ non esse æqualem arcui Α Ι. Producatur etiam Α Γ ad Κ, & fiat Α Κ arcui Δ Ζ æqualis; & per puncta Κ, Τ transeat arcus circuli magni Κ Τ, occurrens arcui Β Γ Ι in Λ.



Jam quoniam duo arcus Κ Α, Α Τ sunt æquales duobus ΔΖ, ΔΕ; & angulus Τ Α Κ æqualis est angulo ΕΔΖ, quippe angulo Β Α Γ ad verticem: erit (*per* 4^m *hujus*) arcus Κ Τ æqualis arcui Ζ Ε, hoc est arcui Β Γ; & angulus Α Κ Τ angulo Δ Ζ Ε, hoc est angulo Α Γ Β. Quoniam vero angulus Α Γ Β, exterior trianguli Κ Λ Γ æqualis est opposito suo angulo Κ; erunt arcus Κ Λ, Λ Γ simul sumpti (*per* 10^m *buj.*) æquales semicirculo. Sed arcus Β Γ Ι est semicirculus: quare arcus Β Γ Ι æqualis est duobus arcubus Γ Λ, Λ Κ. Jam posito, in figurâ primâ, arcu Γ Λ communi; erunt reliqui arcus Β Γ, Λ Ι æquales arcui Κ Λ. Arcus autem Κ Τ æqualis est arcui Β Γ, relinquetur igitur arcus Τ Λ æqualis arcui Λ Ι. At in figura II^{da}, sublato arcu Ι Γ communi, relinquetur arcus Β Γ æqualis utrisque Κ Λ, Λ Ι simul; & arcus Β Γ æqualis est arcui Κ Τ: quare arcus Κ Τ æqualis est arcubus Κ Λ, Λ Ι; & sublato communi arcu

Κ Λ, re-

K A, reliquus arcus A T æqualis erit arcui A I; quare angulus A T I æqualis est angulo A I T, hoc est angulus T angulo B: anguli igitur trianguli A B Γ æquales sunt angulis trianguli A K T, quisque relativo suo; & arcus A B æqualis est arcui A T, uti arcus B Γ arcui K T: reliquus igitur arcus A Γ (*per* 4^m. *hujus*) æqualis est arcui A K. Sed arcus A K æqualis factus est arcui Δ Z: quare arcus A Γ æqualis est arcui Δ Z. Q. E. D.

SCHOLION.

In hac Propositione merito cavetur ne angulus B sit in polo arcus A Γ: sic enim uterque angulus A, Γ foret rectus, & arcus A B, B Γ quadrantes; quibus positis arcus tertius A Γ indefinitus manet. Porro propositio hoc Corollarium est manifestum 13me hujus, ubi demonstrantur triangula esse per omnia æqualia, si, existentibus angulis A, Δ æqualibus, anguli Γ, Z fuerint vel simul obtusi vel simul acuti, absque conditione æqualitatis.

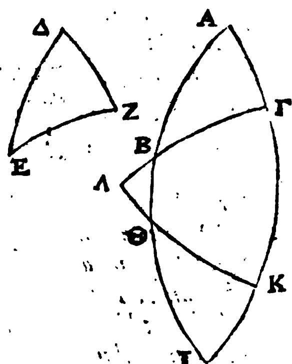
PROP. XVI. THEOR.

Si duo triangula Sphærica duos habeant angulos unius duobus alterius angulis, singulos singulis æquales; latus vero alteri æqualium oppositum in uno æquale sit lateri relativo in altero; arcus vero, in utroque triangulo, alteri angulorum æqualium oppositi simul sumpti non conficiant semicirculum erunt: tum latera illa inutroque æqualia, tum & reliqua latera, reliquique duo anguli æquales.

Sint A B Γ, Δ E Z duo triangula Sphærica, sitque angulus A æqualis angulo Δ, & angulus Γ angulo Z, arcus vero B Γ arcui E Z æqualis; arcus autem A B, Δ E simul sumpti non sint semicirculo æquales; dico arcum A B æqualem esse arcui Δ E, & arcum A Γ arcui Δ Z, angulumque B angulo E.

Producantur duo arcus A B, A Γ ad occursum in puncto I. Cumque duo arcus A B, Δ E non sint semicirculo æquales, atque arcus A I est semicirculus; igitur arcus B I non erit æqualis arcui Δ E: pariterque arcus Γ I non erit arcui Δ Z æqualis. Fiat arcus I Θ arcui Δ E æqualis, & arcus I K arcui Δ Z; & producatur arcus circuli magni per K, Θ ad occursum arcus B Γ in Λ.

Quoniam itaque duo arcus K I, I Θ sunt æquales arcubus Δ Z, Δ E; & angulus Δ æqualis est angulo I (ob angulum I angulo A æqualem, qui ex hypothesi æqualis est angulo Δ) erit (*per* 4ᵐ. *hujus*) arcus Θ K æqualis arcui Z E. Arcus autem Z E æqualis est arcui B Γ; quare Θ K æqualis est arcui B Γ: & angulus Θ K I æqualis est angulo Δ Z E, qui quidem æqualis est angulo Λ Γ B; quare anguli Λ Γ B, Θ K I sunt æquales, ac proinde angulus Λ Γ K angulo Λ K Γ æqualis; adeoque (*per* 3ᵐ *hujus*) arcus Γ Λ æqualis est arcui Λ K. Sed arcus Γ B æqualis est arcui Θ K; quare arcus Λ Θ æqualis est arcui Λ B, ac propterea angulus A B Γ æqualis est angulo I Θ K. Angulus autem I Θ K æqualis est angulo Δ E Z; quare angulus A B Γ est æqualis angulo Δ E Z: atque angulus Z ex hypothesi æqualis est angulo Γ, sicut arcus E Z arcui Δ Z; quare (*per* 14ᵗᵃᵐ *hujus*) arcus A B æqualis est arcui Δ E, & arcus A Γ arcui Δ Z. Et jam demonstratum est angulum B æqualem esse angulo E. Q. E. D.



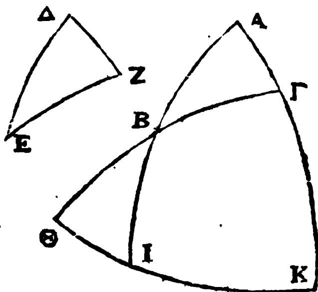
PROP. XVII. THEOR.

Si duo triangula Sphærica habeant tres angulos unius æquales tribus angulis alterius, quemque suo relativo; erunt quoque arcus triangula illa continentes inter se æquales, quisque relativo suo.

Sint A B Γ, Δ E Z duo triangula Sphærica, in quibus angulus A sit æqualis angulo Δ, & angulus B angulo E, sicut angulus Γ angulo Z: dico arcum A B æqualem esse arcui Δ E, & arcum B Γ arcui E Z, arcumque A Γ arcui Δ Z.

Producatur arcus A B ad I, & fiat B I ipsi Δ E æqualis; & producto B Γ ad Θ, fiat B Θ æqualis arcui E Z; & ducatur I Θ arcus circuli magni, qui producatur ad occursum arcus A Γ etiam producti in puncto K. Jam duo arcus Θ B, B I æquales sunt duobus Δ E, E Z, & angulo E æqualis est angulus B: quare arcus I Θ æqualis est arcui Δ Z, & angulus I angulo Δ, qui æqualis

qualis est angulo Α; quare angulus Ι æqualis est angulo Α: angulus vero Θ æqualis est angulo Ζ, qui æqualis est angulo Γ; adeoque angulus Θ æqualis est angulo Γ. Et quoniam angulus Γ exterior trianguli ΘΚΓ æqualis est interiori & opposito angulo Θ, erunt (*per decimam hujus*) arcus ΘΚ,ΚΓ simul sumpti æquales semicirculo: pariterque cum angulus Ι exterior trianguli ΑΙΚ æqualis sit opposito & interiori angulo Α, erunt quoque duo arcus ΑΚ, ΚΙ æquales semicirculo; ac proinde duo arcus ΚΘ, ΚΓ sunt æquales duobus arcubus ΙΚ, ΚΑ. Auferantur utrinque duo arcus communes ΙΚ, ΚΓ, ac reliquus arcus ΘΙ erit æqualis arcui ΑΓ. Sed arcus ΘΙ æqualis est arcui ΖΔ; quare arcus ΖΔ æqualis est arcui ΑΓ: & angulus Α æqualis est angulo Δ, uti angulus Γ angulo Ζ: quapropter (*per* 14^m^. *hujus*) arcus ΑΒ æqualis est arcui ΔΕ, & ΒΓ arcui ΕΖ. Quod erat demonstrandum.



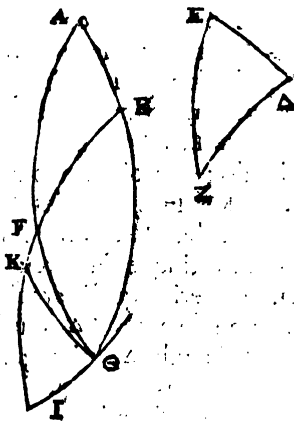
PROP. XVIII. THEOR.

Si duo triangula Sphærica duos habeant angulos unius æquales duobus angulis alterius, quemque relativo suo; reliquum vero angulum unius majorem reliquo alterius: erit arcus subtendens majorem angulum major subtendente minorem. Si vero fuerit unus reliquorum arcuum unius trianguli, una cum relativo suo in altero, æqualis semicirculo; erit arcus reliquus in uno æqualis arcui relativo in altero. Si vero fuerint majores semicirculo; erit arcus reliquus trianguli, cujus angulus minor est, major arcu relativo trianguli alterius. At si fuerint minores semicirculo, minor erit eodem.

Sint duo triangula Sphærica ΑΒΓ, ΔΕΖ, in quibus angulus Β æqualis sit angulo Δ, & angulus Γ angulo Ζ; angulus autem Ε excedat angulum Α: dico quod arcus ΖΔ major est arcu ΒΓ. Ac si arcus ΑΓ una cum relativo suo ΕΖ simul sumpto

sit æqualis semicirculo, erit arcus Α Β æqualis arcui Δ Ε. Quod si fuerint Α Γ, Ε Ζ simul majores semicirculo, erit arcus Α Β major quam Δ Ε. Si vero Α Γ, Ε Ζ minores sint semicirculo, erit etiam arcus Α Β minor arcu Δ Ε.

Producatur Α Γ ad Θ, ita ut Γ Θ sit æqualis ipsi Ε Ζ; atque etiam Β Γ ad Ι, ita ut Γ Ι sit æqualis arcui Δ Ζ; & describatur Θ Ι arcus circuli magni: ac manifestum est eum æqualem esse arcui Δ Ε, ob angulum Ζ æqualem angulo Γ.



Sint jam arcus Α Γ, Ε Ζ æquales semicirculo, adeoque arcus Α Γ Θ erit semicirculus; quare si producatur arcus Α Β transibit per Θ. Ducatur ille, sitque arcus Β Θ.

Itaque quoniam angulus Ι æqualis est angulo Δ, & angulus Δ æqualis est angulo Β, erit angulus Ι æqualis angulo Β. Est autem angulus Β, exterior trianguli Β Θ Ι, æqualis interiori & opposito angulo Ι; quare duo arcus Β Θ, Θ Ι æquales sunt semicirculo. Sed arcus Α Β Θ semicirculus est; quare arcus Α Β Θ æqualis est utrisque Β Θ, Θ Ι; & sublato communi arcu Β Θ, reliquus Α Β æqualis erit reliquo Θ Ι. Est autem Θ Ι ipsi Δ Ε æqualis, quare arcus Α Β æqualis est arcui Δ Ε.

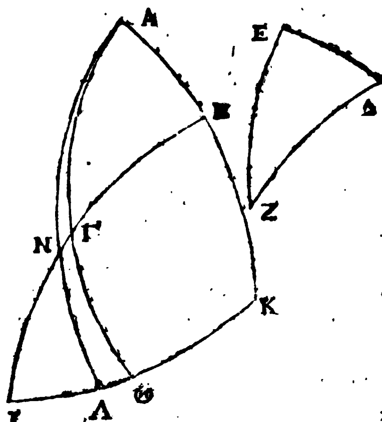
Dico insuper arcum Δ Ζ majorem esse arcu Β Γ. Etenim angulus Γ Θ Ι æqualis est angulo Ε, & angulus Ε major est angulo Α; quare angulus Γ Θ Ι major est angulo Α. Constituatur (*per* 1*mam huj.*) ad punctum Θ in arcu Θ Ι angulus Ι Θ Κ æqualis angulo Α. Cumque angulus Ι, per nuper demonstrata, æqualis sit angulo Β, & angulus Ι Θ Κ æqualis angulo Α, ac duo arcus, super quos sunt æquales anguli, æquales; erunt arcus reliqui æquales arcubus reliquis, quisque relativo suo; ac proinde arcus Κ Ι æqualis erit arcui Γ Β. Arcus vero Γ Ι major est arcu Κ Ι, & Γ Ι æqualis est arcui Δ Ζ; quapropter Δ Ζ major erit arcu Γ Β.

Rursus sint Α Γ, Ζ Ε simul sumpti minores semicirculo: dico Α Β esse minorem quam Δ Ε.

Producantur arcus Γ Θ, Γ Ι, eo quo fecimus modo in præcedente figura, & ducatur Θ Ι arcus circuli magni. Quoniam vero arcus

cus A Γ, E Z simul minores sunt semicirculo, & E Z æqualis est ipsi Γ Θ, erit arcus A Γ Θ minor semicirculo. Cumque hic arcus A B productus transit ultra punctum Θ, producantur A B, Θ I ad occursum in puncto K. Demonstratum autem est in præcedentibus angulum B æqualem esse angulo I, quare (*per* 10^{m}. *hujus*) B K, K I æquales sunt semicirculo. Quoniam vero angulus Γ Θ I æqualis est angulo E, qui major est angulo A, erit angulus Γ Θ I major angulo A; ac proinde duo arcus A K, K Θ minores erunt semicirculo: quare duo arcus B K, K I majores sunt duobus A K, K Θ: & sublatis communibus arcubus B K, K Θ, erit reliquus arcus A B minor arcu I Θ ipsi Δ E æquali; quapropter arcus A B minor erit arcu Δ E.

Dico præterea quod arcus Δ Z major est arcu B Γ. Capiatur enim in arcu I Θ, quem ostendimus majorem arcu A B, arcus æqualis ipsi A B; sitque arcus ille I Λ, & ducatur A Λ arcus circuli magni, occurrens arcui I Γ B in puncto N. Jam quoniam arcus I Λ æqualis est arcui A B, si ponamus duos arcus B K, K Λ communes, manifestum est duos arcus A K, K Λ æquales esse duobus B K, K I, qui æquales sunt semicirculo; quare duo arcus A K, K Λ sunt æquales semicirculo, atque adeo angulus exterior A Λ I, in triangulo A K Λ, æqualis est angulo opposito & interiori K A Λ. Ostensus autem est angulus I æqualis ipsi A B Γ, arcusque super quos sunt anguli æquales in duobus triangulis A B N, Λ N I, nempe arcus A B, Λ I, sunt æquales; quare (*per* 14^{m} *hujus*) arcus reliqui æquales erunt arcubus reliquis: ideo I N æqualis erit ipsi B N, ac proinde arcus I Γ major erit arcu B Γ. Sed arcus I Γ æqualis est arcui Δ Z, adeoque arcus Δ Z major est arcu B Γ. Q. E. D.

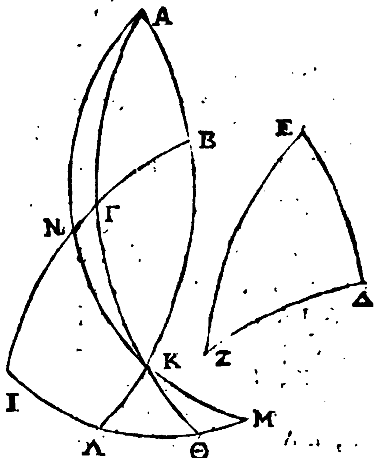


Porro sint arcus A Γ, E Z simul sumpti majores semicirculo: dico A B majorem esse arcu Δ E.

Producantur arcus Γ I, Γ Θ, ut in præcedentibus, & describatur arcus circuli magni I Θ. Quoniam autem duo arcus

A Γ,

ΑΓ, ΕΖ excedunt ſemicirculum, & ΕΖ æqualis eſt ipſi ΓΘ; erit arcus ΑΓΘ major ſemicirculo. Cumque arcus ΑΒ productus occurrat arcui ΓΘ citra punctum Θ, producatur ΑΒ uſque dum occurrat arcui ΙΘ in Λ, & arcui ΑΓΘ in Κ; & ob angulum ΑΒΓ æqualem angulo ΓΙΘ, erunt (*per* 10^m^. *hujus*) duo arcus ΒΛ, ΛΙ æquales ſemicirculo. Sed arcus ΑΒΚ eſt ſemicirculus, quare duo arcus ΒΛ, ΛΙ æquales ſunt arcui ΑΒΚ; & ſublato communi arcu ΒΚ, erit reliquus arcus ΑΒ æqualis arcubus ΚΛ, ΛΙ. Et quoniam angulus Θ, qui æqualis eſt angulo Ε (*ex hypotheſi*) major eſt angulo Α, & angulus Α æqualis eſt angulo Κ; erit angulus Θ major angulo ΘΚΛ, quare (*per* 7^m^ *huj.*) arcus ΚΛ major erit arcu ΛΘ, arcuſque ΙΛ, ΛΚ ſimul majores erunt arcu ΙΘ. Oſtendimus autem eos æquales arcui ΑΒ; quare arcus ΑΒ major eſt arcu ΙΘ arcui ΔΕ æquali. Q. E. D.



Dico quoque arcum ΔΖ majorem eſſe arcu ΒΓ. Quoniam enim arcus ΙΘ minor eſt arcu ΑΒ, fiat arcus ΙΘΜ æqualis arcui ΑΒ; & per puncta Μ, Κ tranſeat arcus circuli magni, qui productus, ut manifeſtum eſt, perveniet ad punctum Α. Sit ille arcus ΜΚΑ, occurrens arcui ΒΓ in puncto Ν. Cumque angulus Ι æqualis eſt angulo ΑΒΓ, erunt duo arcus ΒΛ, ΛΙ æquales ſemicirculo; & arcus ΑΒΚ eſt ſemicirculus, quare arcus ΑΒΚ æqualis eſt utriſque ΒΛ, ΛΙ: & ablato arcu communi ΒΚ, erit reliquus arcus ΑΒ æqualis duobus arcubus ΚΛ, ΛΙ. Arcus autem ΑΒ æqualis eſt arcui ΙΘΜ, quare arcus ΙΛ, ΛΚ ſimul æquales ſunt arcui ΙΘΜ. Auferatur utrinque arcus ΙΛ, & reliquus arcus ΑΚ æqualis erit arcui ΛΜ, unde (*per* 2^dam^ *huj.*) angulus Μ æqualis erit angulo ΛΚΜ, hoc eſt angulo ΒΑΝ: quare angulus ΒΑΝ æqualis eſt angulo Μ, & arcus ΑΒ æqualis eſt arcui ΙΜ, ſuper quos ſunt anguli æquales; quare (*per* 14^m^ *hujus*) arcus reliqui æquales erunt arcubus reliquis,

liquis, quisque relativo suo: arcus itaque I N æqualis est arcui B N; adeoque arcus I Γ, cui æqualis est arcus Δ Z, major erit arcu B Γ. Q. E. D.

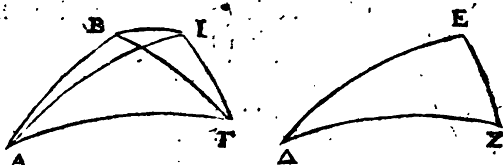
Hanc etiam Propositionem in tres dividunt Arabes, *ita ut sequens XIX*na *apud eos sit Prop. XXII. Unica vero est tam in Codd.* Hebræis *quam* Maurolyco.

PROP. XIX. THEOR.

Si duo triangula Sphærica habeant unum ex arcubus unius æqualem arcui alterius; anguli autem æqualibus arcubus adjacentes ita se habeant, ut alter major sit, alter minor relativo suo; reliqui vero anguli, quibus subtenduntur arcus æquales, non minores sint recto: erunt arcus angulis majoribus subtensi majores arcubus qui minoribus angulis subtenduntur.

Sint A B Γ, Δ E Z duo triangula Sphærica, sitque arcus A Γ æqualis arcui Δ Z, & angulus A major angulo Δ, angulus vero Γ minor angulo Z, nec sit aliquis ex angulis B, E minor recto: dico arcum B Γ majorem esse arcu E Z, & arcum Δ E majorem arcu A B.

Quoniam angulus Γ minor est angulo Z, constituatur ad punctum Γ super arcum A Γ angulus A Γ I, æqualis angulo Z; & fiat arcus Γ I æqualis arcui Z E, & transeat per duo puncta A, I arcus circuli magni A I. Jam quia duo anguli duorum triangulorum Δ Z E, A Γ I sunt æquales, nempe anguli



A Γ I, Δ Z E; arcusque eosdem continentes, nempe arcus A Γ ipsi Δ Z, & Γ I ipsi Z E æquales: erit (*per* 4tam *hujus*) arcus quoque A I æqualis arcui Δ E, & angulus A I Γ angulo Δ E Z. Quoniam autem anguli Δ E Z, A B Γ non sunt minores recto, si ducatur arcus circuli magni B I, necesse est angulos Γ B I, A I B minores esse recto; ac propterea angulus A B I major erit angulo A I B: unde (*per* 7m *hujus*) arcus A I major erit arcu A B. Pariter angulus Γ I B major est angulo Γ B I, adeoque & arcus Γ B major erit arcu Γ I. Sed arcus A I æqualis est arcui

Δ E,

Δ E; quare arcus Δ B major erit arcu A B. Arcus autem Γ I æqualis est arcui E Z; ac propterea arcus Γ B excedet arcum Z B. Q. E. D.

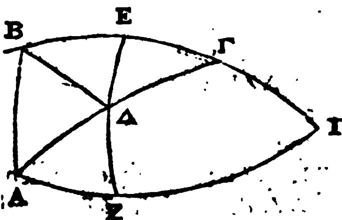
PROP. XX. THEOR.

In omni triangulo Sphærico, si aliquis angulus æqualis fuerit duobus reliquis simul sumptis, ac à majori angulo educatur arcus circuli magni, bifariam dividens arcum angulo illi subtensum; erit arcus ille eductus æqualis dimidio lateris divisi. At si fuerit angulus ille major duobus reliquis, erit arcus eductus minor dimidio basis. Si vero minor fuerit duobus illis, tum major erit arcus ille dimidio basis.

Sit A B Γ triangulum Sphæricum, cujus angulus B æqualis sit duobus reliquis angulis A, Γ; & dividatur arcus A Γ bifariam in Δ, & per puncta B, Δ ducatur arcus circuli magni B Δ: dico arcum B Δ æqualem esse arcui A Δ vel Δ Γ.

Dividatur arcus B Γ bifariam in E, & per E, Δ transeat arcus circuli magni E Δ, qui producatur *ad* Z, *ita ut* Δ Z *sit æqualis ipsi* E Δ; *& ducatur arcus circuli magni* A Z, *qui productus* occurrat arcui B Γ etiam producto in puncto I.

Quoniam arcus E Δ, Δ Z; A Δ, Δ Γ sunt æquales, uti angulus E Δ Γ angulo A Δ Z, erit (*per* 4^{m}. *huj.*) basis E Γ æqualis basi A Z. qui E Γ æqualis est ipsi E B; quare B E æqualis est ipsi A Z: & (*per eandem* 4^{tam}) angulus Δ A Z æqualis est angulo E Γ Δ. Addatur utrinque communis angulus B A Δ; & erunt duo anguli B A Γ, B Γ A, hoc est (*ex hypoth.*) angulus A B Γ, æquales angulo B A I; quare (*per* 2^{m} *hujus*) arcus A I æqualis est arcui B I. Ostensus autem est arcus B E æqualis arcui A Z, adeoque reliquus arcus E I æqualis est reliquo I Z: unde & angulus I Z E æqualis est angulo I E Z; & angulus A Z E æqualis angulo Z E B, *hoc est* A Z Δ *angulo* Δ E B. Sed angulus A Z Δ æqualis est angulo Δ E Γ; æquales igitur sunt anguli Δ E B, Δ E Γ;



ΔΕΓ; arcus autem ΒΕ æqualis est ipsi ΕΓ, & est arcus ΕΔ communis utrique triangulo; quare arcus ΓΔ æqualis est arcui ΒΔ: ΓΔ vero semissis est arcus ΑΓ; adeoque ΒΔ æqualis est semissi arcus ΑΓ. Q. E. D.

Quod si angulus ΑΒΓ major fuerit duobus reliquis angulis: dico ΒΔ minorem esse quam ΔΓ. Eodem etenim argumento probabitur angulum ΖΑΔ æqualem esse angulo ΔΓΕ: ac si adjiciatur angulus ΒΑΓ communis, manifestum est angulum ΒΑΖ, qui æqualis est utrisque ΒΑΔ, ΒΓΔ simul, minorem esse angulo ΑΒΓ; ac proinde angulus ΑΒΓ major est angulo ΒΑΖ; unde arcus ΑΙ excedet arcum ΒΙ. Est autem ΒΕ æqualis arcui ΑΖ, quare reliquus arcus ΖΙ major est reliquo ΕΙ, ac propterea angulus ΖΕΙ major angulo ΕΖΙ; adeoque angulus ΑΖΔ major est angulo ΒΕΔ: sed angulus ΔΕΓ æqualis est angulo ΑΖΔ; quare angulus ΔΕΓ major est angulo ΒΕΔ, & arcus ΒΕ æqualis est arcui ΕΓ, & arcus ΕΔ communis: quare arcus ΔΓ excedit arcum ΔΒ. Sed ΔΓ semissis est arcus ΑΓ: constat itaque propositum, nempe quod si duo reliqui anguli trianguli ΑΒΓ minores fuerint angulo Β, arcus eductus ab angulo Β ad bisectionem lateris eidem subtensi minor erit dimidio ejus.

Ac pari processu demonstraberis quod, si trianguli ΑΒΓ angulus Β minor fuerit duobus angulis Α, Γ, erit arcus ΒΔ major arcu ΔΓ, hoc est dimidio ipsius ΑΓ.

Dico etiam quod, si angulus Β non fuerit major recto, arcus ΒΔ major erit arcu ΔΓ. Etenim tres anguli cujuscunque trianguli Sphærici (*per* 11^{mam} *bujus*) majores sunt duobus angulis rectis; adeoque erunt duo anguli Α,Γ simul majores recto; ac proinde majores sunt angulo Β: & per nuper demonstrata, si fuerit angulus Β minor angulis Α, Γ simul sumptis, erit arcus ΒΔ major arcu ΔΓ.

Coroll. Hinc manifestum est angulum in semicirculo, qui in plano rectus est, in superficie Sphæræ semper majorem esse recto. In hoc autem conveniunt, quod angulus ille sit ubique æqualis duobus reliquis trianguli inscripti angulis simul sumptis.

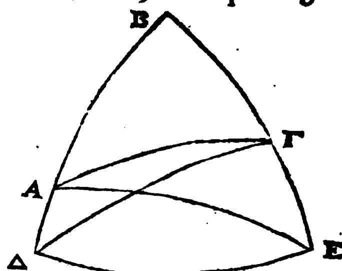
PROP. XXI.

In omni triangulo Sphærico, si angulus aliquis, non minor recto, contineatur sub arcubus quorum uterque sit minor quadrante: erit uterque angulus reliquus acutus.

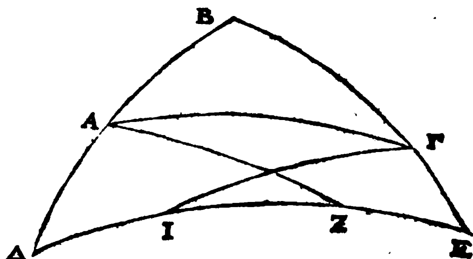
D Sit

Sit A B Γ triangulum Sphæricum, sitque angulus ejus B non minor recto, arcus vero A B, B Γ sint minores quartâ circuli: dico utrumque angulum A, Γ minorem esse angulo recto

Quoniam enim uterque arcus B A, B Γ minor est quadrante; fiant arcus B A Δ, B Γ E circuli quadrantes; & ducatur Δ E arcus circuli magni. Jam quoniam angulus B non est minor recto, vel erit rectus, vel recto major. Si vero fuerit rectus, ac ducantur arcus circulorum magnorum Δ Γ, A E; manifestum est utrumque arcum circuli quadrantem esse; adeoque angulus exterior Δ Γ B trianguli Δ Γ E æqualis est angulo eidem opposito, nempe angulo E. Angulus autem E rectus est; quare angulus Δ Γ B est etiam rectus: atque adeo angulus A Γ B est minor recto. Pari modo constabit angulum Γ A B esse minorem recto.



Quod si angulus B major fuerit recto, erit arcus Δ E major quadrante; arcus vero B Γ E, B A Δ sunt quadrantes: quare punctum B polus est arcus Δ E, atque angulus Δ est rectus (secat enim arcus B Δ arcum Δ E ad angulos rectos, quia transit per polos ejus.) Fiat igitur arcus Δ Z quadrans circuli, & erit punctum Z polus arcus Δ A B. Paritérque si fiat E I quadrans, erit punctum I polus arcus B Γ E. Ducantur de punctis Z, I arcus circulorum magnorum A Z, Γ I; ac manifestum est eos esse circuli quadrantes: quapropter duo arcus Δ Z, Z A simul sunt æquales semicirculo; ac proinde angulus exterior Z A B æqualis erit angulo Δ eidem opposito, atque ideo rectus. Angulus igitur Γ A B minor est recto. Nec absimili modo constabit angulum A Γ B minorem esse recto. Q. E. D.



PROP. XXII. THEOR.

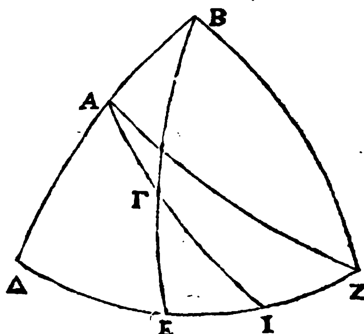
In omni triangulo Sphærico, si aliquis ex angulis non fuerit

rit minor recto, ac uterque arcuum alium quemlibet angulum continentium fuerit minor quadrante: erit latus reliquum quadrante minus, & quilibet reliquorum angulorum acutus.

In triangulo sphærico A B Γ sit angulus A non minor recto, arcus autem A B, B Γ sint quadrante circuli minores: dico arcum A Γ minorem esse quadrante circuli, & utrumque angulum B, Γ minorem esse recto.

Quoniam duo arcus A B, B Γ sunt minores quadrantibus, producantur A B ad Δ & B Γ ad E, ita ut B Δ, B E sint quadrantes; & per puncta Δ, E describatur arcus circuli magni, cujus polus, per jam demonstrata, est punctum B: & producantur arcus A Γ, Δ E usque dum conveniant in puncto I.

Quoniam angulus B A Γ non est minor recto, erit vel rectus vel recto major. Sit primum major recto, & ducatur arcus A Z ad rectos angulos arcui B Δ, qui occurrat Δ E I producto in puncto Z: quapropter Z erit polus arcus B Δ. Per puncta B, Z, transeat arcus circuli magni B Z, & erit angulus A B Z rectus, ac proinde angulus A B Γ minor recto. Quoniam vero arcus E I ad rectos angulos insistit super arcum B Γ E, ac minor est quadrante circuli; erit (*per* 1[m] III. *Theod.*) recta linea jungens puncta I, E minor jungente puncta I, Γ; adeoque arcus I Γ major erit arcu I E, & angulus Γ E I major angulo E Γ I. Sed angulus Γ E I est rectus, quare angulus E Γ I minor est recto. Est autem angulus A Γ B æqualis angulo E Γ I; quare angulus A Γ B minor est recto. Demonstravimus itaque utrumque angulum B, Γ esse minorem recto. Quoniam vero arcus A Δ insistit ad angulos rectos super ipsum Δ E I, erit juncta recta linea A I minor jungente puncta A, Z; ac propterea arcus A Z major arcu A I. Est autem A Z quadrans, quare arcus A I, & multo magis arcus A Γ, minor erit quadrante.



Quod si angulus A sit rectus, manifestum est punctum I devenire polum arcus Δ A B; adeoque (*per præced.*) utrumque

 angulum

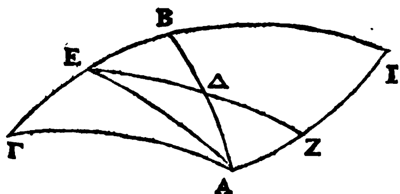
gulum B, Γ minorem esse recto. Arcus autem A I est circuli quadrans; arcus igitur A Γ minor erit quadrante. Q. E. D.

PROP. XXIII. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo qualibet latera dividantur bifariam; erit arcus circuli magni connectens puncta bisectionum major dimidio reliqui lateris.

Trianguli Sphærici A B Γ dividantur latera A B, B Γ bifariam in punctis Δ, E; & per Δ, E transeat arcus circuli magni: dico arcum Δ E majorem esse dimidio lateris A Γ.

Producatur arcus Δ E ad Z, usque dum Δ Z fuerit æqualis ipsi Δ E; & ducatur A Z arcus circuli magni, qui producatur ad occursum ipsius B Γ etiam producti in puncto I. Itaque quoniam arcus E Δ, Δ B sunt æquales ipsis Δ Z, A Δ, & anguli ad verticem sunt æquales, erit arcus E B, hoc est E Γ, arcui A Z æqualis; & angulus A B Γ, exterior trianguli B A I, æqualis erit angulo interiori I A B eidem opposito: quare (*per* 10^{m} *hujus*) arcus A I, I B simul sumpti æquales sunt semicirculo. Adjiciatur arcus B E, & erunt arcus A I, I E majores semicirculo. Ducatur A E arcus circuli magni, & erit angulus Γ E A (*per eandem* 10^{m}) minor angulo E A Z. Sunt autem arcus Γ E, E A æquales arcubus E A, A Z, singuli singulis; quare (*per* 8^{m} *hujus*) arcus Z E major erit arcu Γ A. Sed Δ E semissis est arcus Z E; quare arcus Δ E major est semisse ipsius A Γ. Q. E. D



PROP. XXIV. THEOR.

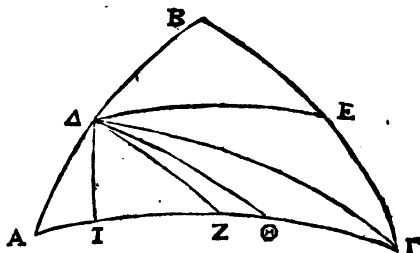
Si trianguli Sphærici aliquis angulus non minor fuerit recto, ac dividantur latera eundem continentia bifariam; ducatur autem per puncta bisectionum arcus circuli magni: erunt anguli, sub ducto arcu & bisectis lateribus contenti, & respectu anguli non recto minoris interiores, minores angulis

angulis ipsius trianguli; nempe unusquisque relativo suo ad idem latus constituto minor.

Trianguli Sphærici Α Β Γ sit angulus Β non minor recto, & dividantur arcus Α Β, Β Γ bifariam in punctis Δ, Ε; & ducatur arcus circuli magni Δ Ε: dico angulum Β Δ Ε minorem esse angulo Β Α Γ, & angulum Β Ε Δ minorem angulo Β Γ Α.

Quoniam arcus Α Β, Β Γ sunt latera trianguli Sphærici, minores erunt semicirculo (*per def.* 2^m^.) Est autem Β Δ dimidium ipsius Α Β, & Β Ε dimidium ipsius Β Γ: quare uterque Β Δ, Β Ε minor est quartâ circuli; & angulus Β non minor est recto; quare (*per* 22^m^ *huj.*) erit uterque angulorum Β Δ Ε, Β Ε Δ minor recto. Jam si neuter angulorum Α, Γ minor fuerit recto, manifestum est angulum Β Δ Ε acutum minorem esse angulo Α obtuso, & angulum Β Ε Δ minorem angulo Γ.

Quod si fuerit uterque angulus Α, Γ minor recto: dico etiam angulum Β Ε Δ minorem esse angulo Γ, & Β Δ Ε minorem angulo Α.



Dividatur enim arcus Α Γ bifariam in Ζ, ac ducantur arcus circulorum magnorum Δ Ζ, Γ Δ. Jam quoniam Β Ε æqualis est ipsi Ε Γ, ac Δ Ε communis est, atque angulus Δ Ε Β minor est recto, atque adeo minor angulo Δ Ε Γ; erit (*per* 8^m^ *hujus*) arcus Β Δ, hoc est Δ Α, minor arcu Δ Γ. Angulus autem Α Ζ Δ minor est angulo Δ Ζ Γ; quare angulus Δ Ζ Α est minor recto, atque angulus Α est etiam minor recto; quare duo anguli Ζ, Α super arcum Α Ζ constituti sunt singuli minores recto: quapropter arcus circuli magni, de puncto Δ ad angulos rectos super arcum Α Γ demissus, occurret arcui Α Ζ. Sit ille arcus Δ Ι. Cumque angulus Α Ι Δ rectus est, atque angulus Α acutus, erit arcus Α Δ major arcu Δ Ι. Sed arcus Α Δ minor est quadrante, quare arcus Δ Ι est etiam minor quadrante. Quoniam vero Δ Ι est ad angulos rectos super arcum Α Γ, & minor est quadrante, erit (*per* 1^mam^ III. *Theod.*) recta jungens puncta Δ, Ι minor quavis alia de Δ ad arcum Α Γ prodeunte, eidemque propior minor erit remotiore. Sed

arcus

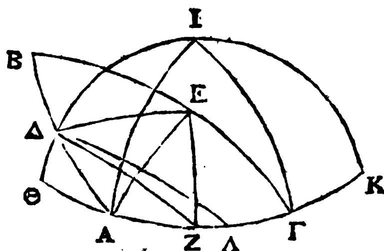
arcus Δ E major est dimidio ipsius A Γ, ut demonstratum est in præcedente 23^{ia}; quare Δ E major est quam A Z: ac si fiat A Θ ipsi Δ E æqualis,& ducatur Δ Θ arcus circuli magni; erit Δ Θ major quam Δ Z. Verum Δ Z (*per* 23^{m} *hujus*) est major dimidio ipsius B Γ, hoc est arcu B E; quare Δ Θ major est quam B E. Est autem A Δ æqualis ipsi Δ B, uti & A Θ ipsi Δ E; basis vero Δ Θ major est basi E B: quare angulus Δ A Θ major est angulo B Δ E. Pari argumento probabitur angulum E Γ A majorem esse angulo B E Δ. Ostendimus itaque angulum B Δ E minorem esse angulo A, angulumque Δ E B minorem angulo Γ. Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR.

Si trianguli Sphærici aliquis angulus non minor fuerit recto, ac dividatur latus eidem oppositum bifariam; ducantur autem à puncto bisectionis duo arcus circulorum magnorum ad puncta quibus bisecantur reliqua duo latera: erunt anguli, quos continent arcus sic ducti cum lateribus trianguli angulum non recto minorem continentibus, minores quam angulus ille non minor recto.

Sit trianguli Sphærici A B Γ angulus A non recto minor, ac dividatur arcus B Γ bifariam in E, & ad puncta media arcuum A B, A Γ ducantur arcus circulorum magnorum E Δ, E Z. Dico utrumque angulum B Δ E, E Z Γ minorem esse angulo A.

Quoniam angulus A non minor est recto, vel erit rectus, vel recto major. Si vero fuerit rectus, ostendimus (*Prop.* 11ma *huj.*) tres angulos omnis Sphærici trianguli majores esse duobus rectis; quare duo anguli B, Γ majores sunt angulo A: ac ducto A E arcu circuli magni, constat, (ex demonstratis in Prop. 20.) arcum A E majorem esse dimidio ipsius B Γ, hoc est, quam B E vel E Γ. Sed A Δ æqualis est ipsi Δ B, & Δ E est communis, basis autem A E major est base E B: quare (*per* 8^{m} *huj.*) angulus



B Δ E

B Δ E minor eſt angulo A Δ E, atque ideo minor recto. Quapropter angulus ille minor erit angulo B A Γ, recto ſcilicet. Pariterque angulus E Z Γ minor erit angulo B A Γ.

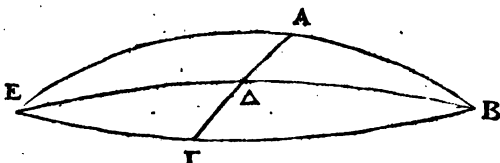
Quod ſi angulus A major fuerit recto, angulus autem B Δ E minor ſit recto, res manifeſta eſt: nempe quod acutus minor eſt obtuſo B A Γ. Sit autem angulus B Δ E major recto: dico quoque illum minorem eſſe angulo B A Γ. Quoniam enim uterque arcus B Δ, B E minor eſt quadrante, atque angulus B Δ E major eſt recto; erit (*per* 22^m^ *hujus*) angulus Δ B E minor recto. Eſt autem B Δ æqualis ipſi Δ A, & Δ E eſt communis, atque angulus B Δ E major eſt angulo A Δ E; quare (*per* 8^m^ *hujus*) arcus B E major eſt arcu E A. Cumque B E æqualis ſit ipſi E Γ, arcus E Γ major erit quam E A. Cum autem arcus Γ Z æqualis ſit ipſi Z A, & E Z communis; erit (*per* 8^m^ *hujus*) angulus E Z Γ major angulo recto. Arcus autem E Γ, Γ Z ſinguli minores ſunt quadrantibus, quare (*per* 22^m^ *huj.*) angulus E Γ A minor eſt recto. Conſtituantur ad puncta Γ & A duo arcus circulorum magnorum A I, Γ I ad angulos rectos ſuper arcum A Γ, qui conveniant in puncto I; & (*per* 13^m^ I. *Theod.*) erit punctum I polus arcus A Γ. Producatur arcus circuli magni per Δ, I ductus, uſque dum occurrat arcui A Γ producto in punctis Θ, K, ab utroque latere puncti Δ; & erit arcus K I quadrans circuli: unde arcus K I Δ major erit quadrante circuli, ac multo major quam Δ Θ. Jam ſuper diametrum circuli Θ A Γ K, quæ eſt linea recta jungens puncta Θ, K, inſiſtit ad angulos rectos ſemicirculus Θ Δ K, diviſus ad Δ in portiones inæquales, quarum minor eſt arcus Δ Θ: recta igitur jungens puncta Δ, Θ (*per* 1^m^ III. *Theod.*) minor erit quàvis aliâ rectâ de puncto Δ ad arcum Θ Γ K prodeunte, eidemque propior minor erit remotiore. Arcus autem E Δ major eſt dimidio arcus A Γ, hoc eſt arcu A Z; quare E Δ major eſt quam A Z. Fiat A Λ æqualis ipſi E Δ, & ducatur Δ Λ arcus circuli magni, & recta quæ prodit de Δ ad Z minor erit junctâ Δ Λ. Recta autem Δ Z ſubtendit arcum Δ Z majorem dimidio arcus B Γ, hoc eſt arcu B E; quare arcus Δ Λ multo major eſt arcu B E. Verum arcus B Δ æqualis eſt arcui Δ A, & Δ E ipſi A Λ; arcus autem B E minor eſt arcu Δ Λ: quare (*per* 8^m^ *hujus*) angulus B Δ E minor eſt angulo B A Γ. Pari argumento probabitur angulum E Z Γ minorem eſſe angulo B A Γ. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXVI. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo quævis latera simul sumpta fuerint semicirculo æqualia, ac ab angulo sub iisdem contento ad latus reliquum ducatur arcus circuli magni dividens angulum illum bifariam: dividet ille arcus latus reliquum bifariam. Ac si dividat latus reliquum bifariam; erit quoque angulus bisectus, & erit arcus eductus circuli quadrans.

Sit Α Β Γ triangulum Sphæricum, cujus duo latera Α Β, Β Γ simul sumpta sint æqualia semicirculo; & ex angulo Β prodeat ad arcum Α Γ arcus circuli magni Β Δ: dico quod, si fuerit angulus Α Β Δ æqualis angulo Γ Β Δ, arcus quoque Α Δ æqualis erit arcui Δ Γ. Ac si fuerit Α Δ æqualis arcui Δ Γ, erit angulus Α Β Δ æqualis angulo Δ Β Γ, atque insuper arcus Β Δ erit circuli quadrans.



Producantur arcus Α Β, Β Δ, Β Γ; ac manifestum est eos concursuros in eodem puncto, quod sit Ε. Quoniam vero Α Β, Β Γ sunt æquales semicirculo, erit (*per* 10^m^ *hujus*) angulus Δ Γ Ε æqualis angulo Β Α Δ. Patet quoque Β Γ æqualem esse ipsi Α Ε, uti Α Β ipsi Ε Γ; & angulus Α Β Δ æqualis est angulo Δ Ε Γ, & latera apud quos sunt æquales illi anguli, nempe Α Β, Ε Γ, sunt æqualia: quare (*per* 14^m^ *hujus*) duo arcus reliqui sunt æquales duobus reliquis respective. Arcus igitur Α Δ æqualis est arcui Δ Γ, & Β Δ arcui Δ Ε. Sed Β Ε est semicirculus; adeoque Β Δ est quadrans circuli.

Quod si ponatur Α Δ ipsi Δ Γ æqualis; dico angulum Α Β Δ æqualem esse angulo Δ Β Γ, & Β Δ esse circuli quadrantem. Est enim angulus Δ Γ Ε æqualis angulo Β Α Δ, & Α Δ æqualis est ipsi Δ Γ, uti Α Β ipsi Γ Ε; quare (*per* 4^m^ *huj.*) arcus Β Δ æqualis est arcui Δ Ε, & angulus Α Β Δ angulo Δ Ε Γ, hoc est angulo Δ Β Γ. Arcus autem Β Ε est semicirculus, & Β Δ dimidium est ipsius Β Ε; quare Β Δ est circuli quadrans. Q. E. D.

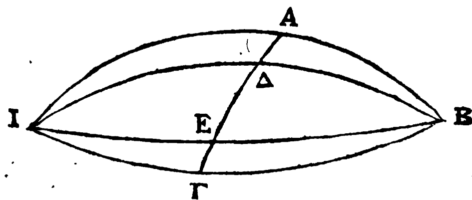
PROP.

PROP. XXVII. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo latera simul sumpta æqualia fuerint semicirculo, & ab angulo sub iisdem contento cadant in latus reliquum duo alii arcus, cum prioribus lateribus æquales angulos continentes: abscindent hi arcus è reliquo latere portiones æquales. Et è contra, si arcus in latus reliquum cadentes absciderint ab eodem duos arcus æquales: continebunt cum lateribus semicirculo æqualibus angulos æquales, arcusque ipsi in utroque casu erunt semicirculo æquales.

In triangulo Sphærico ΑΒΓ sint arcus ΑΒ, ΒΓ simul sumpti æquales semicirculo, & de puncto Β prodeant ad arcum ΑΓ duo arcus circulorum magnorum ΒΔ, ΒΕ, qui contineant cum ipsis ΑΒ, ΒΓ angulos æquales ΑΒΔ, ΕΒΓ: dico quod ΑΔ æqualis est ipsi ΓΕ; quodque arcus ΒΔ, ΒΕ simul sumpti sunt æquales semicirculo.

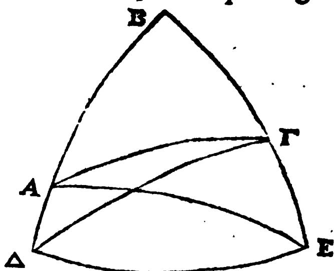
Producantur enim arcus ΑΒ, ΔΒ, ΕΒ, ΓΒ ad occursum; ac manifestum est eos occursuros esse in eodem puncto. Occurrant ad Ι. Cumque arcus ΑΒ, ΒΓ sunt semicirculo æquales, erit angulus ΑΓΙ æqualis angulo ΓΑΒ; & angulus ΑΒΔ æqualis est angulo ΕΒΓ, hoc est angulo ΓΙΕ; arcus autem ΙΓ æqualis est arcui ΑΒ, apud quos sunt anguli illi æquales: quapropter (*per* 14^{m} *hujus*) arcus ΓΕ æqualis est arcui ΑΔ, & arcus ΕΙ arcui ΒΔ. Pari modo constabit arcum ΙΔ arcui ΒΕ esse æqualem: quare arcus ΒΔ, ΒΕ simul æquales erunt arcubus ΔΙ, ΙΕ simul sumptis; ac propterea arcus ΒΔ, ΒΕ simul æquales erunt semicirculo. Q. E. D.



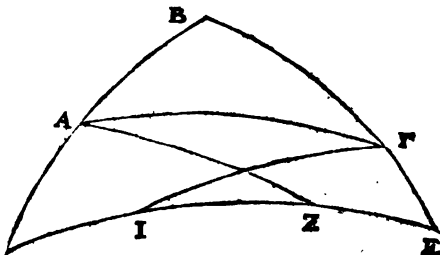
Et converso argumento demonstrabitur, quod, si fuerit arcus ΑΔ æqualis arcui ΕΓ, angulus ΑΒΔ æqualis erit angulo ΕΒΓ; quodque ΔΒ, ΒΕ simul sumpti erunt semicirculo æquales.

Sit A B Γ triangulum Sphæricum, sitque angulus ejus B non minor recto, arcus vero A B, B Γ sint minores quartâ circuli: dico utrumque angulum A, Γ minorem esse angulo recto

Quoniam enim uterque arcus B A, B Γ minor est quadrante; fiant arcus B A Δ, B Γ E circuli quadrantes; & ducatur Δ E arcus circuli magni. Jam quoniam angulus B non est minor recto, vel erit rectus, vel recto major. Si vero fuerit rectus, ac ducantur arcus circulorum magnorum Δ Γ, A E; manifestum est utrumque arcum circuli quadrantem esse; adeoque angulus exterior Δ Γ B trianguli Δ Γ E æqualis est angulo eidem opposito, nempe angulo E. Angulus autem E rectus est; quare angulus Δ Γ B est etiam rectus: atque adeo angulus A Γ B est minor recto. Pari modo constabit angulum Γ A B esse minorem recto.



Quod si angulus B major fuerit recto, erit arcus Δ E major quadrante; arcus vero B Γ E, B A Δ sunt quadrantes: quare punctum B polus est arcus Δ E, atque angulus Δ est rectus (secat enim arcus B Δ arcum Δ E ad angulos rectos, quia transit per polos ejus.) Fiat igitur arcus Δ Z quadrans circuli, & erit punctum Z polus arcus Δ A B. Paritèrque si fiat E I quadrans, erit punctum I polus arcus B Γ E. Ducantur de punctis Z, I arcus circulorum magnorum A Z, Γ I; ac manifestum est eos esse circuli quadrantes: quapropter duo arcus Δ Z, Z A simul sunt æquales semicirculo; ac proinde angulus exterior Z A B æqualis erit angulo Δ eidem opposito, atque ideo rectus. Angulus igitur Γ A B minor est recto. Nec absimili modo constabit angulum A Γ B minorem esse recto. Q. E. D.



PROP. XXII. THEOR.

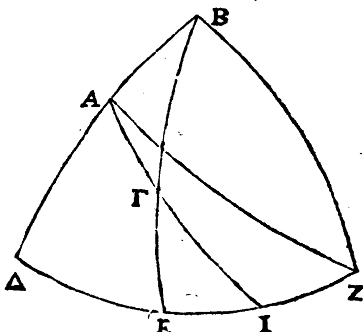
In omni triangulo Sphærico, si aliquis ex angulis non fuerit

rit minor recto, ac uterque arcuum alium quemlibet angulum continentium fuerit minor quadrante: erit latus reliquum quadrante minus, & quilibet reliquorum angulorum acutus.

In triangulo sphærico Α Β Γ sit angulus Α non minor recto, arcus autem Α Β, Β Γ sint quadrante circuli minores: dico arcum Α Γ minorem esse quadrante circuli, & utrumque angulum Β, Γ minorem esse recto.

Quoniam duo arcus Α Β, Β Γ sunt minores quadrantibus, producantur Α Β ad Δ & Β Γ ad Ε, ita ut Β Δ, Β Ε sint quadrantes; & per puncta Δ, Ε describatur arcus circuli magni, cujus polus, per jam demonstrata, est punctum Β: & producantur arcus Α Γ, Δ Ε usque dum conveniant in puncto Ι.

Quoniam angulus Β Α Γ non est minor recto, erit vel rectus vel recto major. Sit primum major recto, & ducatur arcus Α Ζ ad rectos angulos arcui Β Δ, qui occurrat Δ Ε Ι producto in puncto Ζ: quapropter Ζ erit polus arcus Β Δ. Per puncta Β, Ζ, transeat arcus circuli magni Β Ζ, & erit angulus Α Β Ζ rectus, ac proinde angulus Α Β Γ minor recto. Quoniam vero arcus Ε Ι ad rectos angulos insistit super arcum Β Γ Ε, ac minor est quadrante circuli; erit (*per* 1^m III. *Theod.*) recta linea jungens puncta Ι, Ε minor jungente puncta Ι, Γ; adeoque arcus Ι Γ major erit arcu Ι Ε, & angulus Γ Ε Ι major angulo Ε Γ Ι. Sed angulus Γ Ε Ι est rectus, quare angulus Ε Γ Ι minor est recto. Est autem angulus Α Γ Β æqualis angulo Ε Γ Ι; quare angulus Α Γ Β minor est recto. Demonstravimus itaque utrumque angulum Β, Γ esse minorem recto. Quoniam vero arcus Α Δ insistit ad angulos rectos super ipsum Δ Ε Ι, erit juncta recta linea Α Ι minor jungente puncta Α, Ζ; ac propterea arcus Α Ζ major arcu Α Ι. Est autem Α Ζ quadrans, quare arcus Α Ι, & multo magis arcus Α Γ, minor erit quadrante.



Quod si angulus Α sit rectus, manifestum est punctum Ι devenire polum arcus Δ Α Β; adeoque (*per præced.*) utrumque

& eidem oppoſito. Sed & angulus Α Β Δ æqualis eſt angulo Δ Β Γ, qui æqualis eſt angulo Ζ Ε Κ: quare (*per* 14^{m} *hujus*) arcus Β Κ æqualis eſt arcui Κ Ε. Eſt autem arcus Β Κ quadrans circuli, quo minor eſt arcus Β Δ; quare arcus Β Δ minor eſt quadrante circuli. Q. E. D.

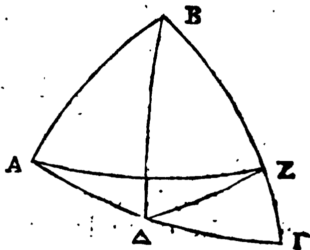
Coroll. Hinc etiam manifeſtum eſt, quod, ſi latera duo trianguli ſimul ſumpta exceſſerint ſemicirculum, erit arcus bifariam dividens tum angulum tum latus tertium quadrante major.

PROP. XXX. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo latera fuerint inæqualia, ſimulque ſumpta minora ſemicirculo; & ab angulo ſub iiſdem contento educatur arcus dividens illum bifariam: erit latus reliquum in ſegmenta inæqualia diviſum, quorum majus adjacebit majori è lateribus angulum continentibus Si vero arcus eductus diviſerit latus reliquum bifariam: tum dividet angulum in portiones inæquales, quarum major adjacebit minori ex arcubus angulum diviſum continentibus.

Sit trianguli Sphærici Α Β Γ majus latus Β Γ; ſintque Α Β, Β Γ ſimul minores ſemicirculo, & ducatur arcus Β Δ ſecans angulum Α Β Γ bifariam, & occurrens tertio lateri Α Γ in Δ: dico quod arcus Δ Γ major eſt arcu Δ Α.

Quoniam Β Γ major eſt quam Α Β, fiat Β Ζ ipſi Α Β æqualis, & ducatur Δ Ζ arcus circuli magni. Cum autem Β Ζ æqualis eſt ipſi Α Β, & Β Δ eſt communis; angulus vero Ζ Β Δ angulo Α Β Δ æqualis: erit (*per* 4^{m} *hujus*) arcus Δ Ζ æqualis arcui Α Δ, & angulus Β Ζ Δ angulo Β Α Δ æqualis. Anguli autem Β Α Δ, Β Γ Δ ſimul ſumpti (*per* 10^{m} *huj*) minores ſunt duobus rectis, quia duo arcus Α Β, Β Γ ſimul ſumpti ſunt minores ſemicirculo: quare duo anguli Β Α Δ, Β Γ Δ minores ſunt angulis Β Ζ Δ, Δ Ζ Γ duobus rectis æqualibus. Auferatur communis angulus



gulus B Z Δ, hoc eſt B A Δ, & reſtabit angulus Δ Z Γ major angulo B Γ Δ; adeoque arcus Δ Γ major erit arcu Δ Z. Sed Δ Z æqualis eſt arcui A Δ; quare Δ Γ major eſt arcu A Δ. Q. E. D.

Quod ſi arcus B Δ diviſerit arcum A Γ in portiones æquales: dico angulum A B Δ majorem eſſe angulo Δ B Γ.

Quoniam enim B Γ major eſt ipſo A B, ponatur B Z æqualis ipſi A B, & ducatur arcus A Z. Jam quia duo anguli Γ A B, B Γ A ſunt minores duobus rectis, & angulus B A Z æqualis eſt angulo B Z A; ſunt autem duo anguli B Z A, Z A Γ æquales angulo Γ A B: erunt tres anguli B Z A, Z A Γ, B Γ A ſimul ſumpti minores duobus rectis. Verum duo anguli B Z A, A Z Γ ſunt æquales duobus rectis; quare, ſublato communi B Z A, erit reliquus angulus A Z Γ major duobus reliquis Z A Γ, B Γ A; ac proinde (*per* 20^m^ *hujus*) erit arcus de puncto Z ad biſectionem arcus A Γ ductus minor dimidio ipſius A Γ: quapropter arcus Δ Z minor eſt quam A Δ, & A B æqualis eſt ipſi B Z, B Δ vero communis: proinde (*per* 8^m^ *hujus*) angulus A B Δ major erit angulo Δ B Z. Q. E. D.

Coroll. 1. *Si vero trianguli latera ſimul ſumpta majora ſint ſemicirculo, & ex angulo ab iiſdem contento ducatur arcus angulum illum biſariam dividens; è contra, ſegmentum majus tertii lateris adjacebit lateri trianguli minori, minus majori.*

Coroll. 2. *Quod ſi, iiſdem poſitis, arcus eductus latus tertium biſariam diviſerit; major pars anguli diviſi majori trianguli lateri adjacebit, minor minori.*

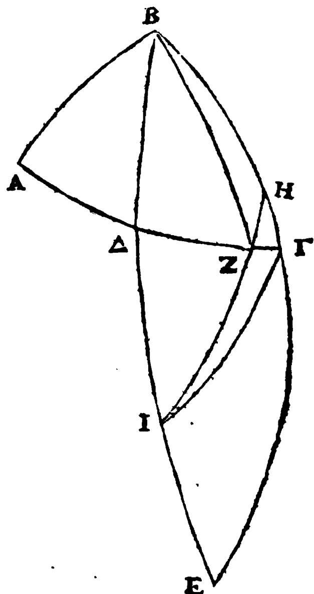
Iiſdem poſitis, ſive angulus, ſive latus eidem ſubtenſum biſariam ſecetur arcu ab angulo prodeunte; erunt trianguli latera angulum illum continentia ſimul ſumpta majora duplo arcus biſecantis.

In triangulo A B Γ ſit primo arcus A Γ biſariam ſectus arcu B Δ ex angulo B educto: dico duos arcus A B, B Γ ſimul ſumptos majores eſſe duplo arcûs B Δ.

Producantur arcus B Δ, B Γ ad occurſum in puncto E, & per jam demonſtrata (*in* 29ma *huj.*) erit arcus B Δ minor quadrante, adeoque Δ E major erit quam B Δ. Fiat Δ I æqualis ipſi B Δ, & ducatur Γ I arcus circuli magni. Itaque quoniam arcus Γ Δ æqualis eſt ipſi Δ A, & Δ B ipſi Δ I, & duo anguli A Δ B, Γ Δ I æquales; erit arcus Γ I æqualis arcui A B. Adjiciatur utrinque

arcus

arcus Β Γ, & erunt Β Γ, Γ Ι simul sumpti æquales arcubus Α Β, Β Γ simul sumptis. Sed Ι Γ, Γ Β simul (*per 5ᵐ hujus*) majores sunt arcubus Β Δ, Δ Ι simul; quare Α Β, Β Γ majores sunt ipsis Β Δ, Δ Ι. Arcus autem Β Δ, Δ Ι simul sumpti dupli sunt arcûs Β Δ; quare arcus Α Β, Β Γ simul majores sunt duplo ipsius Β Δ. Q.E.D.



Quod si arcus Β Δ dividat angulum Β bifariam: dico quoque quod Α Β, Β Γ simul sunt majores duplo arcus Β Δ. Quoniam enim Β Δ dividit angulum Β bifariam; erit, per jam demonstrata, arcus Γ Δ major quam Δ Α. Fiat Δ Ζ ipsi Δ Α æqualis, & ducatur Β Ζ arcus circuli magni, & per puncta Ι, Ζ arcus Ι Ζ Η. Quoniam autem Ζ Δ æqualis est ipsi Δ Α, & posuimus Δ Ι ipsi Β Δ æqualem, angulique Α Δ Β, Ι Δ Ζ sunt æquales: erit arcus Α Β æqualis arcui Ι Ζ, & angulus Β Α Δ æqualis angulo Δ Ζ Ι. Angulus autem Β Α Δ (*per 9ᵐ hujus*) major est angulo Β Γ Δ; quare angulus Δ Ζ Ι major est angulo Β Γ Δ. Sed angulus Δ Ζ Ι æqualis est angulo Γ Ζ Η, quare angulus Γ Ζ Η major est angulo Β Γ Δ; & angulus Γ Ζ Β major est angulo Γ Ζ Η, adeoque multo major angulo Β Γ Ζ: proinde (*per 7ᵐ buj.*) arcus Γ Β major est arcu Ζ Β. Verum arcus Ι Ζ, Ζ Β simul (*per 5ᵐ hujus*) majores sunt quam Β Δ, Δ Ι; adeoque Ι Ζ, Γ Β multo majores sunt arcubus Β Δ, Δ Ι. Est autem Ι Ζ ipsi Α Β æqualis; quare Α Β, Β Γ simul majores sunt ipsis Β Δ, Δ Ι simul. Sed Β Δ, Δ Ι sunt dupli ipsius Β Δ; quare Α Β, Β Γ simul majores sunt duplo ipsius Β Δ. Q.E.D.

Coroll. E contra vero, si latera trianguli simul sumpta majora sint semicirculo; erit arcus, bifariam dividens vel angulum contentum, vel latus tertium, major dimidio laterum continentium simul sumptorum.

Tricesima hæc Propositio in duas dividitur in Codd. Arabicis, *apud quos facit Prop.* XXXIII *&* XXXIV.

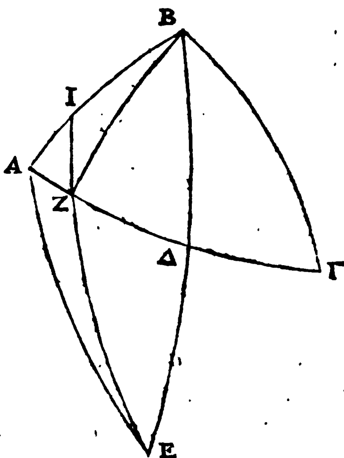
PROP.

PROP. XXXI. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo latera fuerint inæqualia, simulque sumpta minora semicirculo; & ab angulo sub iisdem contento educatur ad latus reliquum arcus circuli magni, qui æqualis sit semissi laterum continentium: dividet ille arcus tum angulum tum latus reliquum in segmenta inæqualia; & utriusque portio major adjacebit lateri trianguli minori, minor vero majori.

Trianguli Sphærici A B Γ sint latera A B, B Γ minora semicirculo, sitque B Γ major quam B A; arcus autem B Δ, eductus de B ad occursum arcus reliqui A Γ, sit æqualis dimidio ipsorum A B, B Γ simul sumptorum: dico quod arcus A Δ major est ipso Δ Γ, & angulus A B Δ major angulo Δ B Γ.

Producatur arcus B Δ ad E, ita ut Δ E sit æqualis ipsi B Δ, & ducatur A E arcus circuli magni. Jam arcus E A, A B (*per* 5^m *huj.*) majores sunt ipsis E Δ, Δ B; arcus autem E Δ, Δ B sunt æquales lateribus A B, B Γ, quia B Δ est ipsorum dimidium: quare A E, A B excedunt duos A B, B Γ; &, sublato utrinque A B, remanebit A E major quam B Γ. Sed B Γ major est quam B A; quare A B major est dimidio ipsorum A B, B Γ, nempe ipso B Δ; & arcus B Δ, Δ E sunt æquales, quare B Γ major est quam Δ E. Possibile igitur est ut ducatur ab E arcus circuli magni ipsi B Γ æqualis, qui cadat inter duo arcus A E, E Δ. Sit ille arcus E Z, qui producatur ad occursum arcus A B in puncto I; & ducatur arcus B Z. Jam arcus B Z, Z E simul majores sunt quam B Δ E, & B Δ E æqualis est ipsis A B, B Γ simul sumptis; quare B Z, Z E excedunt arcus A B, B Γ. Sed Z E æqualis est ipsi B Γ; quare reliquus B Z major est quam A B, ac proinde angulus B A Z major



jor

jor est angulo B Z A, ac multo major angulo I Z A. Angulus autem I Z A æqualis est angulo Γ Z E; quare angulus B A Γ major est angulo Γ Z E. Addatur utrinque angulus B Γ A; & erunt duo anguli B A Γ, B Γ A majores duobus Γ Z E, B Γ A. Duo autem anguli B A Γ, B Γ A (*per* 10^{m} *buj.*) sunt minores duobus rectis; quare anguli B Γ A, Γ Z E sunt minores rectis: duo igitur triangula B Δ Γ, E Δ Z duos habent angulos ad verticem æquales; atque arcus duos alios angulos continentes æquales, nempe arcum B Δ arcui Δ E, & arcum B Γ arcui Z E; reliqui vero anguli sunt minores rectis; quare (*per* 13^{m} *hujus*) arcus reliquus æqualis erit arcui reliquo, ac duo anguli reliqui duobus reliquis respective æquales: adeoque angulus Γ B Δ angulo Z E Δ, atque arcus Γ Δ æqualis est arcui Δ Z. Sed arcus A Δ major est quam Δ Z, adeoque major quam Γ Δ. Arcus autem E Z, hoc est arcus B Γ, major est arcu B A; arcus igitur E I major est arcu B A, & multo major arcu I B: quocirca angulus I B E, hoc est A B Δ, major est angulo I E B, hoc est Z E Δ. Sed angulus Z E Δ æqualis est angulo Γ B Δ, uti jam demonstratum est; angulus igitur A B Δ major est angulo Γ B Δ. Q. E. D.

Coroll. Si vero latera simul sumpta majora fuerint semicirculo, contrarium eveniet; & major pars tum anguli tum lateris divisi adjacebit lateri majori, minor vero minori.

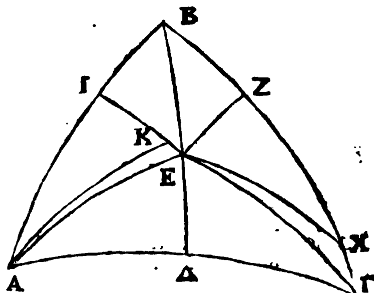
PROP. XXXII. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo latera sint inæqualia & simul sumpta minora semicirculo; & educatur ab angulo sub iisdem contento arcus circuli magni, dividens latus reliquum bifariam; & in arcu illo educto capiatur punctum intra triangulum, à quo ad extremitates arcus bisecti ducantur arcus circulorum magnorum: ipsi continebunt cum lateribus trianguli primis angulos inæquales, quorum major erit cum latere minore, minor vero cum latere majore.

In triangulo Sphærico A B Γ sint latera A B, B Γ simul minora semicirculo, & B Γ major quam A B; & ex angulo B prodeat arcus circuli magni B Δ, dividens arcum A Γ bifariam in Δ; & sumatur in B Δ punctum aliquod E, à quo ducantur ad extre-

extremitates arcus A Γ duo arcus circulorum magnorum A E, E Γ: dico angulum B A E, qui adjacet arcui A B, majorem esse angulo B Γ E arcui majori B Γ adjacente.

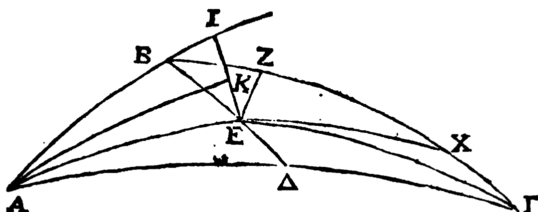
Quoniam enim arcus B Δ dividit A Γ bifariam, erit (*per* 30^am^ *hujus*) angulus A B Δ major angulo Γ B Δ; quare angulus Γ B Δ est minor recto: atque angulus A Γ B minor est angulo B A Γ, ac proinde minor recto. Angulo igitur B Γ Δ existente semper acuto, cadet arcus à puncto E ad arcum B Γ normaliter demissus, inter puncta B, Γ. Sit ille arcus E Z. Arcus autem de puncto E super arcum A B perpendicularis, vel occurret ipsi A B, vel non. Occurrat primo inter A, B ad modum arcus E I: anguli igitur B I E B Z E sunt recti, & angulus I B E major est angulo E B Z, & arcus B E communis est utrique triangulo; quare (*per* 19^m^ *hujus*) arcus E I major est arcu E Z. Fiat arcus I K æqualis arcui E Z. Quoniam vero arcus circuli A I occurrit arcui E I ad angulos rectos, erit (*per* 1^mam^ III. *Theod.*) juncta recta A I minima omnium rectarum linearum de puncto A ad arcum E I prodeuntium, eidemque propior minor remotiore; quare recta de puncto A ad K ducta minor est rectâ de puncto A ad E; adeoque arcus A K minor erit arcu A E. Arcus autem A E minor est arcu Γ E, quare arcus Γ E major est arcu A K. Arcus A K autem major est arcu K I, quia angulus I rectus est; & arcus I K æqualis est arcui E Z: quare arcus A K major est arcu Z E. Fieri igitur potest ut ducatur ab E ad arcum Z Γ arcus æqualis arcui A K, qui cadat inter puncta, Z, Γ. Sit ille arcus E X. Cum itaque arcus Z E æqualis sit ipsi I K, & angulus E Z X rectus æqualis sit recto I, uti & arcus E X ipsi A K æqualis; erit (*per* 13^m^ *hujus*) angulus I A K æqualis angulo Z X E, ac propterea angulus I A E major erit angulo Z X E. Sunt autem arcus A E, E Γ simul sumpti minores semicirculo; quare (*per* 6^m^ *hujus*) arcus A E, E Γ simul sunt minores semicirculo: & arcus A K minor est quam A E; quapropter arcus Γ E, A K simul, hoc est arcus Γ E, E X simul, multo minores sunt semicirculo. Angulus igitur Z X E (*per*



 10^m^ *hujus*)

10^m *hujus*) major est angulo Ε Γ Χ. Angulus autem Ε Α Ε major est angulo Ζ Χ Ε, adeoque multo major angulo Β Γ Ε. Q.E.D.

Quod si arcus de puncto Ε normaliter demissus ad arcum Α Β non occurrat ei inter puncta Α, Β; sed cadat extra à parte anguli Β, ut in figura secunda: producto arcu minore Α Β, in



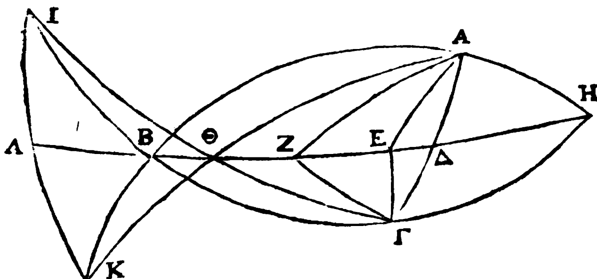
eum demittatur normalis Ε Ι; & fiat, ut supra, arcus Ι Κ ipsi Ε Ζ æqualis, & ponatur arcus Ε Χ arcui Α Κ æqualis: & eodem omnino argumento, quo in præcedente casu usi sumus, demonstrabitur angulum Β Α Ε majorem esse angulo Β Γ Ε.

Si vero arcus, normaliter ab Ε demissus ad arcum Α Β, cadat extra à parte anguli Α, res manifesta est. Etenim angulus Ε Α Β major est recto, adeoque & totus angulus Β Α Γ multo major erit recto. Sed, per demonstrata in 10ma hujus, anguli Β Α Γ, Β Γ Α simul sumpti minores sunt duobus rectis; quare angulus Β Γ Α, & multo magis angulus Β Γ Ε, minor est recto. Quapropter angulus Ε Α Β major est angulo Β Γ Ε, obtusus acuto. Q. E. D.

Coroll. Quod si latera Α Β, Β Γ *simul sumpta majora fuerint semicirculo, diviso latere tertio bifariam in puncto* Δ, *producantur arcus* Β Α, Β Γ, Β Δ *ad occursum in puncto* Η; *& in* Β Δ *capiatur* Δ Ζ *ipsi* Η Δ *æqualis*: *& ducantur arcus circulorum magnorum* Γ Ζ, Ζ Α. *Jam* (per 4^m hujus) *arcus* Γ Ζ, Η Α; Α Ζ, Η Γ *sunt respective æquales, angulusque* Γ Α Ζ *angulo* Η Γ Α, *uti angulus* Α Γ Ζ *angulo* Η Α Γ *æqualis*: *duo igitur anguli* Η Γ Α, Α Γ Ζ *simul sunt æquales duobus* Η Α Γ, Γ Α Ζ *simul sumptis, hoc est angulus* Η Γ Ζ *angulo* Η Α Ζ; *ac proinde angulus* Ζ Γ Β *æqualis erit angulo* Ζ Α Β. *Jam si capiatur punctum* Ε *inter* Δ *&* Ζ, *& ducantur arcus* Α Ε, Ε Γ; *per præcedentia, angulus* Ζ Γ Ε *major erit angulo* Ζ Α Ε; *& adjectis utrinque æqualibus* Ζ Γ Β, Ζ Α Β, *erit angulus* Ε Γ Β, *minori lateri* Γ Β *adjacens, major angulo* Ε Α Β *majori* Α Β *adjacente, ut antea.*

E contra vero, si capiatur punctum inter Ζ *&* Β, *ut* Θ: *dico angulum*

angulum ΘΑΒ *majori lateri adjacentem majorem esse angulo* ΘΓΒ. *Ductis enim arcubus* ΘΓ, ΘΑ *qui simul sint minores semicirculo, manifestum est ex præmissis angulum* ΖΑΘ *minorem esse angulo* ΖΓΘ: *his autem ex æqualibus* ΖΑΒ, ΖΓΒ *sublatis, residuus angulus* ΘΑΒ *major erit residuo* ΘΓΒ. *Si vero arcus* ΘΑ, ΘΓ *simul excesserint semicirculum; productis arcubus* ΑΒ, ΑΘ *ad occursum in puncto* Κ, *arcubusque* ΓΒ, ΓΘ *ad punctum* Ι: *erit* ΒΙ *æqualis arcui* ΓΗ, *&* ΒΚ *ipsi* ΑΗ; *triangulumque* ΙΒΚ *per omnia æquale erit triangulo* ΑΗΓ; *ac basis ejus bisecabitur in puncto* Λ *ab arcu* ΒΔ *producto.*



Arcus autem ΓΙ, ΑΚ *sunt semicirculi; &* ΑΘ, ΘΓ *simul excedunt semicirculum; quare reliqui arcus* ΙΘ, ΘΚ *simul minores sunt semicirculo; ac proinde angulus* ΒΙΘ *adjacens majori lateri* ΙΒ, *juxta jam demonstrata, minor erit angulo* ΒΚΘ: *angulus igitur* ΘΑΒ, *qui quidem æqualis est angulo* ΒΚΘ, *major erit angulo* ΘΓΒ *ipsi* ΘΙΒ *æquale & minori lateri* ΒΓ *adjacente. Quod si arcus* ΑΘ, ΘΓ *simul conficiant semicirculum, demittantur ad arcus* ΑΒ, ΒΓ *normales de puncto* Θ. *Cumque angulus* ΑΒΘ (per 30m hujus) *major sit angulo* ΓΒΘ; *major erit arcus normaliter ad* ΑΒ *demissus quam qui ad* ΒΓ *demittitur. Sunt autem arcus* ΓΘ, ΘΚ, *qui angulis rectis subtenduntur, æquales; quare angulus* Κ, *hoc est angulus* ΒΑΘ, *major erit angulo* ΒΓΘ.

Quocirca si sumatur punctum Θ *inter verticem* Β *& punctum* Ζ, *erit angulus qui adjacet majori trianguli lateri major eo qui adjacet minori. E contra vero, si capiatur punctum, ut* Ε, *inter* Ζ *&* Δ, *major angulus adjacebit lateri minori, minor majori.*

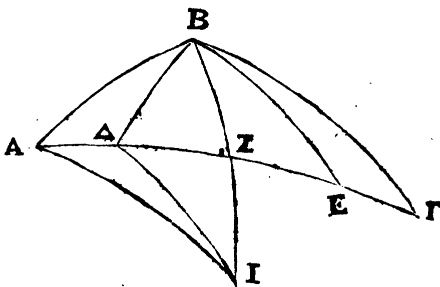
PROP. XXXIII. THEOR.

Si triangulum Sphæricum duo habeat latera inæqualia &

simul minora semicirculo, & ab utrâque extremitate lateris reliqui abscindantur duo arcus æquales, & à punctis sectionum ducantur arcus ad angulum à lateribus semicirculo minoribus contentum: tunc ipsi continebunt cum lateribus illis angulos inæquales, quorum major erit apud latus minus, & minor apud latus majus: & erunt arcus ducti simul sumpti minores lateribus trianguli simul.

In triangulo Sphærico ABΓ sint latera AB, BΓ minora semicirculo, & AB minus quam BΓ; & in ΓA capiantur ΓE, AΔ æquales, & ducantur arcus BΔ, BE: dico angulum ABΔ majorem esse angulo EBΓ; quodque arcus BΔ, BE simul sumpti minores sunt ipsis AB, BΓ simul sumptis.

Dividatur ΔE bifariam in Z, & ductus arcus BZ producatur ad I, ita ut ZI, ZB sint æquales: & jungantur arcus AI, IΔ. Quoniam itaque BZ dividit AΓ bifariam, (*per 29^m hujus*) minor erit quadrante: cumque ZΓ, ZA sunt æquales, & BZ, ZI æquales, uti angulus BZΓ angulo AZI; erit arcus BΓ arcui AI æqualis: ac pari ratione arcus BE ipsi IΔ. Est autem ΓE ipsi AΔ æqualis; quare angulus ΓBE æqualis est angulo AIΔ. AI vero ipsi BΓ æqualis est, & BΓ major est arcu AB, quare AI major est arcu AB: & BA, AI simul sunt minores semicirculo; AZ autem secat arcum BI bifariam, sumiturque in eo punctum Δ, & ducuntur arcus BΔ, ΔI. Quocirca angulus ABΔ major est angulo AIΔ ipsi EBΓ æquali: unde angulus ABΔ major erit angulo EBΓ. Præterea arcus IA, AB simul (*per 6^m hujus*) majores sunt ipsis BΔ, ΔI simul: & arcus IA, BΓ sunt æquales inter se, uti ΔI, BE; quare AB, BΓ simul majores sunt ipsis ΔB, BE simul sumptis Q. E. D.



Coroll. Si vero latera simul sumpta majora fuerint semicirculo: dico angulum majorem adjacere majori lateri; arcusque ductos simul sumptos majores esse lateribus trianguli simul.

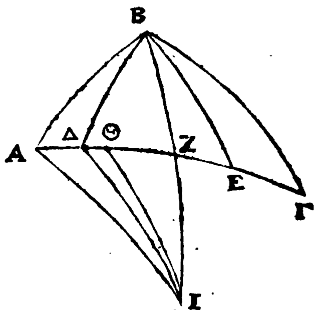
PROP.

PROP. XXXIV. THEOR.

In omni triangulo Spharico latera habente inaqualia, simul vero minora semicirculo; si ab angulo lateribus illis contento ducantur ad latus reliquum duo arcus, qui contineant cum lateribus trianguli duos angulos æquales: abscindent hi arcus ab utrâque extremitate lateris reliqui portiones ejus inaquales, quarum minor adjacebit minori, major vero majori è lateribus. Et erunt arcus ducti simul sumpti minores lateribus trianguli simul sumptis.

In triangulo Sphærico A B Γ sint latera A B, B Γ minora semicirculo, & B Γ majus quam A B; & ducantur arcus B Δ, B E continentes cum ipsis A B, B Γ angulos æquales: dico quod A Δ minor est quam E Γ; quodque B Δ, B E simul sunt minores ipsis A B, B Γ simul sumptis.

Dividatur A Γ bifariam in Z, & producatur B Z ad I, ut sint B Z, Z I æquales; & ducantur arcus A I, I Δ. Et, ut in præcedente ostendimus, erit primo B Γ ipsi A I æqualis, & angulus Z A I angulo Z Γ B. Angulus autem A B Δ major est angulo A I Δ; atque angulus A B Δ æqualis est angulo E B Γ: quare angulus E B Γ major est angulo A I Δ. Fiat igitur angulus A I Θ æqualis angulo E B Γ. Demonstravimus autem angulos E Γ B, Δ A I æquales esse, uti arcus B Γ, A I æquales, apud quos sunt anguli æquales: quare (*per* 14^{m} *hujus*) arcus A Θ, Γ E erunt æquales, atque adeo arcus A Δ minor erit quam E Γ. Dico quoque quod arcus A B, B Γ simul excedunt arcus Δ B, B E simul sumptos. Nam cum B A, A I simul (*per* 6^{m} *hujus*) majores sunt quam B Δ, Δ I; & arcus A I, B Γ sunt æquales; erunt arcus A B, B Γ simul majores quam B Δ, Δ I. Angulus autem A Z I major est recto, ac arcus A I major arcu Z I; quare (*per* 1^{m} III. *Theod.*) arcus Δ I major est arcu I Θ, at-



I Θ, atque I Θ æqualis eſt ipſi B E: quare Δ I major eſt quam B E, ac proinde A B, B Γ multo excedunt ipſas B Δ, B E. Q. E. D.

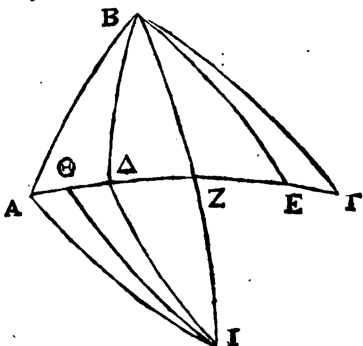
Coroll. Quod ſi latera trianguli ſimul ſumpta majora fuerint ſemicirculo; è contra arcus qui adjacet majori lateri major erit; arcuſque ducti ſimul ſumpti majores erunt lateribus trianguli.

PROP. XXXV.

In omni triangulo Sphærico, cujus ſunt duo latera inæqualia & minora ſemicirculo, ſi ducantur, ab angulo lateribus iſtis contento ad latus reliquum, duo arcus qui ſimul ſumpti æquales ſint duobus trianguli lateribus ſimul; conſtituent hi arcus cum lateribus trianguli angulos inæquales: abſcindent etiam è reliquo trianguli latere arcus inæquales; eritque tum angulus major, tum arcus abſciſſus major, apud latus trianguli minus.

In triangulo Sphærico A B Γ ſit arcus B Γ major quam B A, qui ſimul ſint minores ſemicirculo, & ducantur arcus B Δ, B E ipſis B A, B Γ ſimul ſumptis æquales: dico quod arcus A Δ major eſt quam E Γ, anguluſque A B Δ major angulo E B Γ.

Dividatur Δ E bifariam in Z, & ducatur B Z arcus circuli magni, qui producatur ad I, ita ut ſint B Z, Z I æquales; & jungantur arcus circulorum magnorum A I, I Δ. Quoniam itaque arcus Δ Z, Z E; & B Z, Z I ſunt reſpective æquales, uti anguli ad Z æquales; erunt arcus B E, I Δ æquales, atque adeo arcus B Δ, Δ I ſimul æquales arcubus B Δ, B E, hoc eſt ipſis A B, B Γ ſimul: proinde arcus I Δ, Δ B ſimul ſunt æquales ipſis A B, B Γ. Sunt autem I A, A B (*per* 6^{m} *huj.*) majores ipſis I Δ, Δ B; quare I A, A B majores ſunt quam A B, B Γ: & ſublato communi A B, erit arcus A I major ipſo B Γ. Et quoniam B Z dividit arcum Δ E bifariam, conſtabit (*per* 30^{m} *hujus*) arcus E B, B Δ ſimul



B Δ simul majores esse duplo arcus B Z. Atqui B Δ, B E simul æquales sunt ipsis A B, B Γ; quare A B, B Γ majores sunt duplo ipsius B Z: & B Γ major est quam A B, ac proinde quam B Z. Sunt autem B Z, Z I æquales; quare Z I minor est quam B Γ. Verum A I major est quam B Γ, quare possibile est ut ducatur à puncto I ad arcum A Z arcus qui cadat inter puncta A, Z, ipsique B Γ æqualis. Sit ille arcus I Θ; & erit (*per* 4^m *huj.*) Θ Z æqualis ipsi Z Γ. Arcus autem Z Δ ipsi Z E æqualis est. Restabit igitur Δ Θ ipsi E Γ æqualis; unde manifestum erit arcum A Δ majorem esse arcu E Γ. Et (*per* 32^m *huj.*) constabit angulum A B Δ majorem esse angulo A I Δ, multoque majorem angulo Θ I Δ. Sed angulus Θ I Δ æqualis est angulo E B Γ (quoniam anguli Z B Γ, Z I Θ; Z B E, Z I Δ sunt respective æquales, adeoque & reliquus E B Γ reliquo Θ I Δ æqualis) quare angulus A B Δ major est angulo E B Γ. Q. E. D.

Coroll. Quod si latera trianguli majora fuerint semicirculo, tum angulus major, tum arcus abscissus major, erit apud latus majus. Quæ omnia manifesta erunt, si producantur arcus A B, B Δ, B E, B Γ *ad occursum.*

SCHOLION.

Propositio XXX. *eamque subsequentes quinque, locum habent etiam in triangulis planis rectilineis; id quod proclive esset demonstrationibus propriis in singulis comprobare. In præsentiarum sufficiat indicasse triangula Sphærica minima formam rationemque habere triangulorum planorum; unde manifestum est eadem omnia quæ in dictis propositionibus de Sphæricis demonstrata dedit* Menelaus, *etiam de Planis non minus vera esse.*

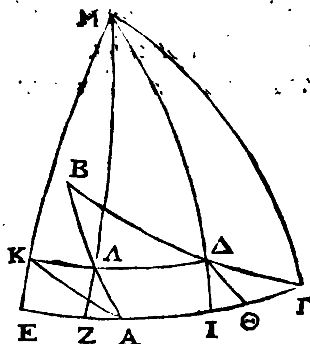
MENE-

MENELAI
ALEXANDRINI
SPHÆRICORUM
Lib. II.

PROP. I. PROBL.

A sumpto puncto in latere trianguli Sphærici obtusanguli, angulo obtuso opposito; ducere arcum circuli magni, qui cum altero ex arcubus, obtusum angulum continentibus, comprehendat angulum eidem obtuso angulo æqualem.

Sit triangulum ΑΒΓ quale descripsimus; ita ut ΑΒ, ΒΓ sint minores semicirculo; & capiatur in arcu ΒΓ punctum Δ: oporteat ducere ad arcum ΑΓ à puncto Δ arcum circuli magni, continentem cum ipso ΑΓ angulum æqualem obtuso ΒΑΓ.



Sit Μ polus arcus ΑΓ, & per puncta Μ, Δ ducatur arcus circuli magni ΜΔΙ; & producatur arcus ΑΓ ad Ε, ita ut ΑΕ, ΓΙ sint æquales; & ducatur ΜΕ arcus circuli magni. Quoniam autem ΓΒ, ΒΑ simul minores sunt semicirculo, erit (*per* 13^mam^ *hujus*) angulus

angulus E A B major angulo Γ. Fiat angulus E A K (*per* 1^m I. *hujus*) æqualis angulo Γ; cumque anguli apud æquales arcus duorum triangulorum Γ Δ I, A K E sint respective æquales; erit arcus E K æqualis arcui I Δ: & arcus E M æqualis est arcui M I; quare arcus M K æqualis est arcui M Δ. Polo igitur M, intervallo M Δ, describatur arcus circuli K Λ Δ, qui arcui A B occurrat in puncto Λ; & ducatur arcus circuli magni M Λ Z. Quoniam autem angulus A est obtusus, erit B Γ major quam A B; adeoque Γ I major quam Λ Z. Ponatur itaque in arcu Γ I arcus I Θ ipsi Λ Z æqualis, & per Δ, Θ transeat arcus circuli magni Δ Θ: dico angulum Δ Θ Γ æqualem esse angulo B A Γ.

Quoniam enim arcus M Λ Z æqualis est arcui M Δ I, & M Λ ipsi M Δ æqualis; erit arcus Λ Z arcui I Δ æqualis. Fecimus autem arcus Λ Z, I Θ æquales, & anguli Δ I Θ, Λ Z A sunt etiam æquales, quippe recti: erit igitur angulus Δ Θ I (*per* 4^m I. *hujus*) æqualis angulo B Λ Z: quapropter angulus deinceps Δ Θ Γ æqualis erit angulo B A Γ. Q. E. D.

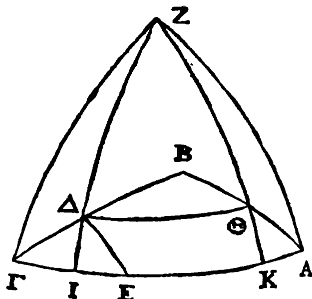
PROP. II. PROBL.

In omni triangulo Sphærico, duos angulos acutos habente, si capiatur punctum vel intra triangulum, vel in aliquo è lateribus angulos illos acutos subtendentibus: possumus ducere è puncto sumpto ad latus trianguli, apud quod sunt duo anguli illi acuti, arcum circuli magni, qui contineat cum eo angulum æqualem angulo contento sub eodem & reliquo latere trianguli.

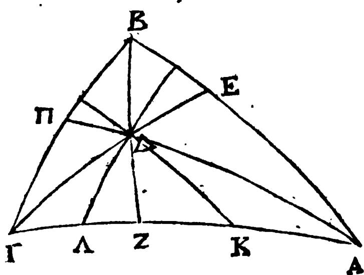
In triangulo Sphærico A B Γ sit uterque angulus A, Γ acutus, & capiatur primo in altero è lateribus B Γ punctum aliquod Δ: dico possibile esse ducere de Δ arcum circuli magni, qui contineat cum arcu A Γ, a parte puncti Γ, angulum æqualem angulo A.

Quoniam enim uterque angulus A, Γ minor est recto; ex utroque termino A, Γ erigantur arcus Γ Z, Z A ad rectos angulos super A Γ; & manifestum est eos concursuros ultra punctum B. Conveniant in Z, quod polus erit arcus A Γ, & ducatur Z Δ I arcus circuli magni: dein polo Z, intervallo Z Δ, describatur arcus Δ Θ, & per Θ ducatur arcus circuli magni Z Θ K. Jam

si fuerit Β Γ major quam Α Β, manifestum est angulum Β Α Γ majorem esse angulo Δ Γ Ι. Est autem angulus Θ Κ Α rectus & æqualis recto Δ Ι Γ, uti arcus Δ Ι arcui Θ Κ; unde manifestum est majorem esse arcum Ι Γ quam Κ Α. Et si adjiciatur arcui Ι Γ arcus Ε Ι ipsi Κ Α æqualis, & fiat, ut factum est in figura primâ, habebimus propositum. Quod si fuerit Β Γ minor arcuum, erit Γ Ι minor quam Α Κ; &, cæteris pari modo peractis, si fiat Ε Ι ipsi Α Κ æqualis, & ducatur arcus Δ Ε; erit angulus Δ Ε Ι æqualis angulo Β Α Κ. Q. E. F.



Si vero punctum non fuerit in latere trianguli Α Β Γ, sed intra illud, puta ad Δ: ducatur per Γ, Δ arcus circuli magni Γ Δ Ε; cumque uterque angulus Ε Α Γ, Ε Γ Α est recto minor, possibile erit ducere ad arcum Α Γ, de puncto Δ in arcu Ε Γ, arcum circuli magni, qui contineat cum eo angulum æqualem angulo Β Α Γ, quemadmodum ostensum est in hujus propositionis præmissis. Sit autem ille arcus Δ Κ: quare angulus Δ Κ Γ æqualis erit angulo Β Α Γ. Ac si velimus ducere, de puncto Δ ad arcum Α Γ, arcum qui contineat cum eo angulum æqualem angulo Β Γ Α, ducatur arcus Α Δ Π; &, per jam dicta, possumus ducere per Δ, ad Α Γ in triangulo Α Π Γ, arcum facientem cum Α Γ angulum æqualem angulo Γ. Sit ille arcus Δ Λ; quare angulus Δ Λ Α æqualis erit angulo Β Γ Α.

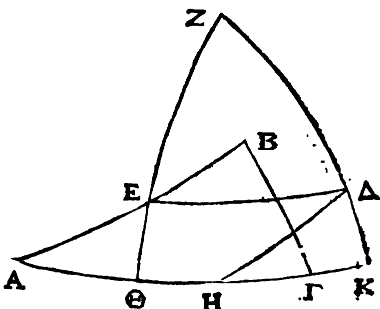


Dico quoque, quod, si arcus Α Β trianguli Sphærici Α Β Γ minor fuerit quadrante circuli, arcus per punctum Δ ductus ad arcum Α Γ, & cum eo continens angulum æqualem angulo Β Α Γ, si producatur, occurret arcui Β Γ inter Β & Γ. Ducatur enim per Δ arcus circuli magni Β Δ Ζ; cumque anguli Α, Γ simul minores sint duobus rectis; erunt arcus Α Β, Β Γ simul (*per* 10m I. *huj.*) minores semicirculo. Quoniam vero arcus Β Ζ cadit medio

medio inter eos, erit ſaltem alter ex arcubus A B, B Γ major arcu B Z: ac ſi fuerit B Γ major arcu B Z, manifeſtum eſt A B, B Z ſimul minores eſſe ſemicirculo. Etiamſi vero B Γ non fuerit major quam B Z, ſupponitur tamen A B minor quadrante, qui quidem major eſt quam B Z: quare A B, B Z ſimul ſumpti minores ſunt ſemicirculo, atque adeo angulus exterior B Z Γ major eſt angulo A. Arcus igitur de puncto Δ eductus ad arcum A Γ, ac cum eodem angulum continens æqualem angulo A, cadet inter puncta Z, A; ac proinde arcus K Δ productus occurret arcui B Γ. Q. E. D.

SCHOLION.

Non video quid opus ſit tantis ambagibus in re facili & manifeſta. Etenim in omni caſu, & quocunque modo ſumatur punctum Δ, *vel in arcu* B Γ, *vel intra vel extra triangulum, in ſpatio omni interjacente circulum majorem* A Γ *& minorem ipſi* A Γ *parallelum, quem contingit circulus* A B, *poſſumus arcum per* Δ *ducere qui cum arcu* A Γ *contineat angulum æqualem angulo* A. *Sit enim* Z *polus arcus* A Γ: *& polo* Z, *intervallo* Z Δ, *deſcribatur arcus circuli minoris, qui, cum inter dictos parallelos ſit, neceſſario occurret arcui* A B, *ſi opus ſit producto. Occurrat in puncto* E. *Dein fiat arcus* Δ H *ipſi* A E *æqualis, & deſcribatur arcus circuli magni* Δ H: *dico angulum* Δ H Γ *æqualem eſſe angulo* B A Γ. *Demiſſis enim ad arcum* A Γ *normalibus* E Θ, Δ K; *ex* 12ma I. *hujus, conſtabit triangula* A E Θ, H Δ K *per omnia æqualia eſſe.*

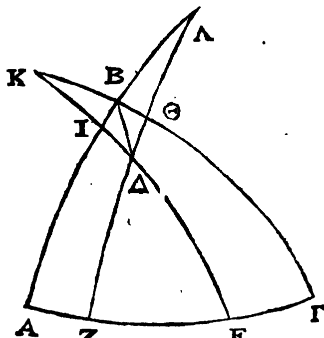


PROP. III. THEOR.

Si trianguli Sphærici angulus aliquis non major fuerit recto, ac fuerit utrumque latus angulum illum continens circuli quadrante minus; ac ſi capiatur punctum

intra triangulum, per quod ducatur ad latus reliquum angulo illi subtensum duo arcus circulorum magnorum, qui cum eodem angulos angulis trianguli reliquis contineant respective æquales: erit utrumque latus figuræ quadrilateræ apud verticem trianguli, è lateribus ejus à ductis arcubus abscissum, minus latere eidem opposito.

In triangulo Sphærico Α Β Γ sit angulus Β non major recto; utrumque vero latus Α Β, Β Γ sit quadrante minus, & è sumpto puncto Δ educatur (*per præced*) arcus circuli magni Θ Δ Ζ, qui faciat angulum Δ Ζ Γ æqualem angulo Α; transeat etiam per Δ arcus Ε Δ Ι, constituens angulum Δ Ε Ζ æqualem angulo Γ: dico quod duo latera quadrilateri Θ Β, Ι Β, quæ abscissa sunt è lateribus trianguli, minora sunt lateribus iisdem oppositis; nempe quod arcus Β Θ minor est arcu Δ Ι, & arcus Β Ι minor quam Θ Δ. Conspicuum autem est, quod, si Ζ Δ, Δ Ε ulterius producerentur, convenient cum ipsis Α Β, Β Γ supra quadrilaterum, ut in figura videre est.



Producantur itaque Γ Β, Ε Ι ad occursum in Κ, & Α Β, Ζ Θ ad occursum in Λ, & ducatur Β Δ arcus circuli magni. Jam quoniam angulus Δ Ζ Ε æqualis est angulo Α, erunt arcus Α Λ, Λ Ζ simul sumpti (*per* 10^m^ I. *huj*) æquales semicirculo; adeoque Β Λ, Λ Δ simul sunt minores semicirculo: unde (*per* 10^m^ I. *huj.*) angulus Ι Β Δ major erit angulo Β Δ Λ. Ac pari argumento, cum Β Κ, Κ Δ sint minores semicirculo, erit angulus Θ Β Δ major angulo Β Δ Κ; adeoque totus angulus Θ Β Ι, quem supponimus recto non majorem, major erit angulo Θ Δ Ι: ac proinde anguli Θ Β Ι, Θ Δ Ι simul sumpti erunt minores duobus rectis. Quoniam vero in omni triangulo Sphærico tres anguli (*per* 11^m^ *huj.*) sunt majores duobus rectis, patet quatuor angulos quadrilateri majores esse quatuor rectis: cum autem demonstratum sit duos angulos ad Β & Δ minores esse duobus rectis; erunt duo reliqui anguli Β Θ Δ, Β Ι Δ majores duobus rectis. Habent igitur duo triangula Θ Β Δ, Β Δ Ι arcum Β Δ communem utrique; &, per jam dicta, angulus

Ι Β Δ unius major est angulo alterius Β Δ Θ; prioris autem trianguli angulus reliquus apud latus commune, nempe angulus Β Δ Ι, minor est reliquo alterius angulo Θ Β Δ; tertii autem anguli in utroque, nempe anguli Θ & Ι, majores sunt recto: latera igitur, quæ angulis majoribus subtenduntur, erunt (*per* 19mI. *hujus*) majora, quæque angulis minoribus minora: ac proinde arcus Δ Ι major erit quam Β Θ, & Θ Δ major arcu Β Ι. Q. E. D.

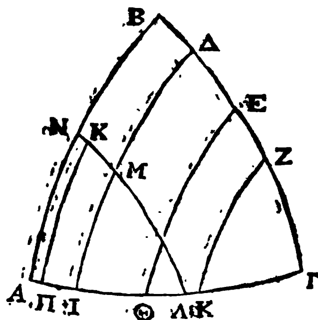
PROP. IV. THEOR.

In triangulo Sphærico, si fuerint duo crura æqualia, & angulus ab iisdem contentus non major recto; & uterque reliquorum angulorum acutus; & si capiantur in uno crurum duo arcus æquales, sive continui sive disjuncti; ac ducantur ab extremitatibus arcuum sumptorum ad basim arcus circulorum magnorum, continentes cum eadem basi angulos æquales angulis trianguli qui ad basim: tum segmenta basis erunt arcus inæquales, quorum ille qui adjacet lateri trianguli indiviso major erit altero ab eodem remotiore: erunt quoque duo arcus extremi (quorum alter adjacet lateri indiviso, alter angulo eidem opposito) simul sumpti æquales duobus reliquis arcubus intermediis. Quod si capiantur ex basi arcus æquales, sive continui sive disjuncti, ac ab eorum extremitatibus ducantur arcus ad alterum crurum, qui contineat cum basi angulos æquales angulo ad basim trianguli: abscindent hi arcus è crure illo segmenta inæqualia, quorum quod propius est cruri indiviso minus erit remotiore: & erit crus indivisum, una cum illo arcu qui adjacet angulo eidem cruri opposito simul sumpto, minus duobus reliquis arcubus intermediis simul sumptis.

In triangulo Sphærico æquicruri Α Β Γ sint crura æqualia Α Β, Β Γ; angulus vero non major recto sit Β; uterque vero reliquorum angulorum Α, Γ sit minor recto; & abscindantur ex arcu Β Γ duo arcus æquales Β Δ, Ε Ζ; & per puncta Δ, Ε, Ζ ducantur ad basim Α Γ arcus circulorum magnorum Δ Ι, Ε Θ, Ζ Κ, continentes

continentes cum ea angulos æquales angulo Α: dico quod Α Ι major est quam Θ Κ; quodque arcus Α Β, Ζ Κ simul sumpti sunt æquales ipsis Δ Ι, Ε Θ simul sumptis.

Fiat Ι Λ æqualis ipsi Κ Γ: cumque uterque angulus Α, Γ est minor recto, erit utrumque crurum Α Β, Β Γ minus quadrante, adeoque arcus è puncto Λ ductus, qui contineat cum Α Λ angulum æqualem angulo Γ, occurret arcui Α Β. Sit ille angulus Α Λ Μ æqualis angulo Γ; & erit Ι Μ ipsi Κ Ζ æqualis, & Μ Λ ipsi Γ Ζ; quia arcus Ι Λ æqualis est ipsi Γ Κ, & anguli qui sunt apud arcus æquales sunt etiam æquales. Angulus autem Β non est major recto, ac utrumque latus Α Β, Β Γ est minus quadrante, & angulus Μ Λ Ι est æqualis angulo Γ, uti angulus Μ Ι Λ angulo Α; erit igitur (*per præcedentem*) arcus Μ Ν major quam Β Δ. Β Δ autem est æqualis ipsi Ε Ζ: quare Μ Ν major est quam Ε Ζ. Sit Μ Χ ipsi Ε Ζ æqualis, & ducatur arcus Χ Π, continens cum Α Γ angulum Χ Π Γ æqualem angulo Α. Quoniam vero Γ Ζ æqualis est ipsi Λ Μ, & Ζ Ε æqualis ipsi Μ Χ; erit totus arcus Γ Ε æqualis toti Χ Λ. Atqui Χ Λ est æqualis ipsi Χ Π, quare Χ Π æqualis est ipsi Γ Ε, & Γ Ε ipsi Ε Θ; quare arcus Χ Π æqualis est ipsi Ε Θ, atque adeo Γ Θ æqualis ipsi Λ Π. Fecimus autem Γ Κ æqualem ipsi Λ Ι; quare Ι Π æqualis erit ipsi Θ Κ. Sed punctum Π cadit inter Α, Ι; adeoque Α Ι major est quam Θ Κ. Q. E. D.



Dico jam quod Α Β, Ζ Κ simul æquales sunt ipsis Δ Ι, Ε Θ simul sumptis. Quoniam enim Β Δ æqualis est ipsi Ε Ζ, & Δ Ε communis est, erit Β Ε æqualis ipsi Δ Ζ. Adjiciatur utrinque Ζ Γ; & arcus Β Ε, Ζ Γ simul æquales erunt arcui Δ Γ. His addatur communis arcus Ε Γ, & erunt Β Γ, Γ Ζ simul æquales ipsis Δ Γ, Γ Ε simul. Verum Β Γ æqualis est ipsi Β Α, & Δ Γ ipsi Δ Ι, & Γ Ε ipsi Ε Θ, uti & Γ Ζ ipsi Ζ Κ; quare arcus Α Β, Ζ Κ simul sumpti sunt æquales arcubus Δ Ι, Ε Θ simul sumptis. Q. E. D.

Porro si fuerit Α Ι ipsi Θ Κ æqualis, ac ducantur arcus Ι Δ, Θ Ε, Κ Ζ, sub eodem angulo quo Α Β super arcum Α Γ: dico quod Β Δ minor est quam Ε Ζ; quodque arcus Α Β, Ζ Κ simul minores sunt arcubus Ι Δ, Θ Ε simul sumptis.

Fiat

Fiat I Λ ipsi K Γ æqualis, & ducatur arcus Λ M N continens cum Λ Γ angulum Λ Λ M æqualem angulo Γ. Itaque quoniam I Λ æqualis est ipsi Γ K, & anguli qui sunt super arcus æquales, sunt in utroque triangulo Z Γ K, M Λ I respective æquales; erit (*per* 14^{m} I. *hujus*) Γ Z ipsi Λ M æqualis. Cum autem Γ K, Λ I, & K Θ, Λ I sunt æquales, erit Γ Θ ipsi Λ Λ æqualis, adeoque & Λ N ipsi Γ E. At vero Γ Z æqualis est ipsi Λ M; quare M N æqualis est ipsi Z E. Sed (*per* 3^{m} II. *huj.*) M N major est quam B Δ; quare E Z major est quam B Δ.

Dico quoque quod A B, Z K simul sunt minores ipsis Δ I, E Θ. Nam cum B Δ minor est quam E Z, adjecto utrinque Δ E, erit totus B E minor arcu Δ Z. Addatur utrinque communis Z Γ, & erunt arcus B E, Z Γ simul minores arcu Δ Γ. His adjiciatur utrinque arcus Γ E, & erunt arcus B Γ, Γ Z simul minores ipsis Δ Γ, Γ E simul sumptis. Sed B Γ æqualis est ipsi B A, & Γ Z ipsi Z K; uti Δ Γ ipsi Δ I, atque E Γ arcui Θ B: quapropter A B, Z K simul minores sunt ipsis Δ I, E Θ simul sumptis. Q. E. D.

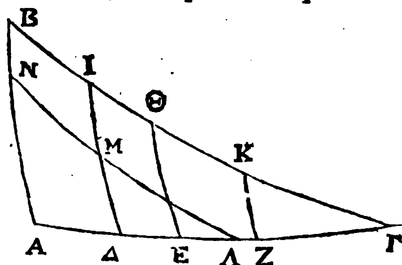
PROP. V. THEOR.

Si in triangulo Sphærico aliquis ex angulis non major fuerit recto; & arcus ipsum continentes fuerint inæquales, nec major eorum excesserit quadrantem; & si capiantur in basi utcunque duo arcus æquales, à quorum terminis ducantur arcus circulorum magnorum ad arcum majorem, continentes cum basi angulos æquales contento sub basi & arcu reliquo: abscindent hi arcus ex arcu majori segmenta inæqualia, quorum majus erit illud quod propius distat à basi. Et erit arcus indivisus, una cum eo qui adjacet angulo trianguli eidem opposito simul sumpto, minor duobus reliquis arcubus intermediis.

In triangulo Sphærico A B Γ, sit angulus B non major recto, & sit B Γ major quam A B, sed non major quartâ circuli; & in A Γ capiantur duo arcus æquales A Δ, E Z, & ducantur arcus Δ I, E Θ, Z K, continentes cum A Γ angulos æquales angulo A. dico quod arcus I B minor est arcu Θ K; quodque arcus A B, Z K simul minores sunt ipsis Δ I, E Θ simul sumptis.

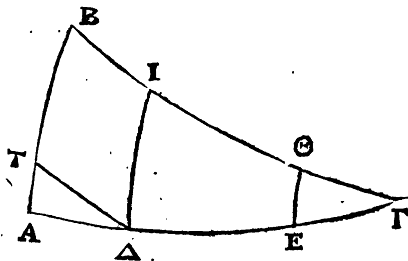
Fiat

Fiat ΔΛ ipsi ZΓ æqualis, & ducatur ΛM continens cum ΛΓ angulum æqualem angulo Γ; & erit ΛM ipsi ΓK æqualis, & ΔM ipsi KZ. Cum autem ΛΔ æqualis sit ipsi ΓZ, & EZ ipsi ΔA, erit totus ΓE æqualis toti AΛ; adeoque ΛN æqualis est ipsi ΓΘ, & AN ipsi EΘ, uti ΓK ipsi ΛM; quare MN æqualis est ipsi ΘK. Sed (*per* 3^m II. *huj.*) arcus MN major est arcu IB; quare IB minor est quam ΘK. Q. E. D.



Dico quoque quod AB, ZK simul minores sunt ipsis ΔI, EΘ simul sumptis. Quoniam enim (*per eandem* 3^m) arcus IM major est arcu BN; adjiciatur utrinque AN, & erunt IM, AN simul majores quam AB. Est autem AN æqualis arcui EΘ, quare AB minor est arcubus IM, EΘ simul sumptis. His adde arcum ΔM, hoc est ZK, utrinque; & erunt AB, ZK simul minores ipsis ΔI, EΘ, simul sumptis. Q. E. D.

Si vero ponantur arcus æquales apud terminos arcus AΓ, ut AΔ, ΓE; & ducantur arcus ΔI, EΘ constituentes angulos cum ipso AΓ æquales angulo A: dico quod BI minor est quam ΓΘ, & AB minor ipsis IΔ, ΘE simul sumptis.



Ad punctum Δ cum arcu AΓ fiat angulus AΔT æqualis angulo Γ: cumque AΔ æqualis sit ipsi EΓ, & anguli, qui sunt apud arcus æquales in utroque triangulo ΓΘE, AΔT, sint respective æquales; erit (*per* 14^m I. *huj.*) arcus AT ipsi EΘ, & ΔT ipsi ΓΘ æquales. Sed ΔT major est quam IB; quare ΓΘ major est quam IB. Cum autem arcus ΔI (*per eandem*) major sit quam BT; si utrinque addatur arcus AT, qui æqualis est ipsi EΘ, erit totus arcus AB minor utrisque ΔI, EΘ simul sumptis. Q. E. D.

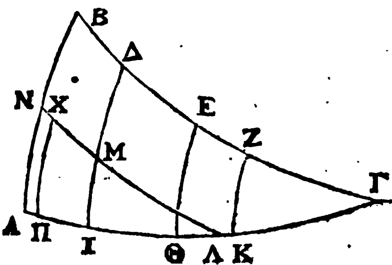
1.} *Codd.* Arabicis *Prop.* II. IV. *& hæc Quinta in binas partitæ sunt; ita ut apud eos quæ sequitur loco Sextæ Nona sit.*

PROP.

PROP. VI. THEOR.

Si in triangulo Sphærico angulus aliquis non major fuerit recto, arcusque ipsum continentes fuerint inæquales, nec eorum major excesserit quadrantem circuli; ac si abscindantur ex uno horum arcuum duo arcus æquales, à quorum terminis educantur ad basim arcus circulorum magnorum, constituentes cum basi angulos æquales angulo quem continet basis cum arcu reliquo: abscindent hi arcus è basi segmenta inæqualia, quorum quod adjacet lateri indiviso majus erit reliquo. Quod si arcus divisus major fuerit reliquo; erit arcus indivisus, una cum arcu educto, qui adjacet angulo eidem arcui indiviso opposito, minor duobus arcubus intermediis simul sumptis. "Si vero arcus divisus minor fuerit indiviso; erit "arcus indivisus, una cum arcu qui adjacet angulo ar- "cui indiviso opposito, major duobus reliquis arcubus in- "termediis.

In triangulo Sphærico A B Γ, cujus angulus B non major sit recto, sint crura A B, B Γ inæqualia, nec eorum majus excedat quartam circuli; & capiantur in arcu B Γ duo arcus æquales B Δ, E Z, ducanturque arcus circulorum magnorum Δ I, E Θ, Z K, continentes cum basi A Γ angulos æquales angulo A: dico quod A I major erit quam Θ K; quodque si arcus B Γ, in quo capiantur duo arcus æquales, major fuerit quam A B, erunt A B, K Z simul minores arcubus I Δ, Θ E simul sumptis. "Si vero B Γ "minor fuerit quam A B, "erunt è contra A B, Z K si- "mul majores ipsis I Δ, Θ E simul sumptis.

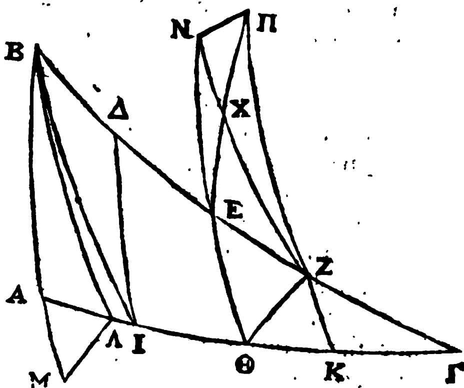


Ponatur I Λ ipsi K Γ æqualis, & ducatur arcus circuli magni Λ M N, continens cum A Λ angulum æqualem angulo Γ. Quoniam vero Λ I æqualis est ipsi Γ K, & angulus Γ æqualis angulo M Λ I, angulus vero K angulo M I Λ; erit (*per* 14^m^ I. *hujus*) arcus

cus Γ Z æqualis arcui Λ M, & K Z ipsi I M. Cumque arcus A B, B Γ simul minores sint semicirculo; erunt anguli A, Γ simul minores duobus rectis, ac proinde arcus Λ M occurret ipsi A B. Occurrat ei ad N; & erit M N (*per* 3^m II. *bujus*) major arcu Δ B. Fiat M X ipsi Δ B æqualis, & è puncto X ducatur arcus X Π, continens cum A Γ angulum X Π Γ æqualem angulo A. Quoniam vero M X, Δ B sunt æquales, uti sunt Δ B, Z E æquales; erunt quoque Z E, M X æquales: & Γ Z, Λ M sunt æquales, quare totus arcus Γ E est æqualis toti Λ X. Angulo autem Γ æqualis est angulus X Λ Π, & angulus X Π Λ æqualis est angulo E Θ Γ; & arcus X Π, E Θ sunt singuli minores arcu A B quadrante minore; quare arcus X Π, E Θ simul non sunt æquales semicirculo: proinde arcus X Π (*per* 16^m I. *bujus*) æqualis est ipsi E Θ. Est etiam Γ Θ ipsi Λ Π æqualis, uti Γ K ipsi Λ I; restabit igitur arcus K Θ æqualis ipsi I Π, quo major est Λ I: adeoque arcus A I major est arcu Θ K. Q. E. D.

Sit jam B Γ major quam B A, & capiantur in B Γ arcus æquales B Δ, E Z, & ducantur Δ I, E Θ, Z K continentes cum A Γ angulos æquales angulo A: dico quod arcus A B, Z K simul minores erunt ipsis I Δ, E Θ simul sumptis.

Primo sit angulus B A Γ non minor recto; & producatur arcus A B ad M, ita ut A M sit æqualis ipsi Z K. Jam autem ostensum est, quod A I major est quam K Θ: fiat igitur A Λ æqualis ipsi K Θ, & ducantur arcus circulorum magnorum M Λ, Z Θ. Quoniam itaque anguli Z K Γ, B A Γ sunt æquales; erit angulus Z K Θ æqualis angulo Λ A M. Et Λ A, A M sunt æquales ipsis K Θ, Z K respective: erit igitur basis Z Θ æqualis basi Λ M, & angulus K Z Θ angulo A M Λ. Cum autem omnis trianguli Sphærici tres anguli sint majores duobus rectis, erunt anguli Θ Z K, Z Θ K, Z K Θ sive E Θ I, majores duobus rectis: quare anguli Θ Z K, Z Θ K, E Θ I majores sunt angulis Z Θ K



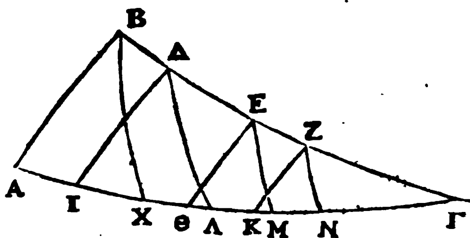
Z Θ E

Z Θ E & E Θ I. Auferantur communes Z Θ K, E Θ I, & reliquus angulus Θ Z K major erit angulo Z Θ E; adeoque angulus A M Λ major erit angulo Z Θ E. Fiat arcus Θ E N æqualis arcui M A B, & ducatur arcus circuli magni Z N. Quoniam igitur arcus N Θ æqualis eſt arcui B A M, uti arcus A M arcui Z Θ, & angulus A M Λ major eſt angulo E Θ Z; erit (*per* 8ᵐ I. *bujus*) arcus B Λ major arcu Z N. Cum autem A B conſtituit cum A Γ angulum recto non minorem, erit arcus B I major arcu B Λ; Et B Λ major eſt quam Z N; quare B I major eſt quam Z N. Cum vero arcus Δ I, E Θ conſtituunt cum A Γ angulos æquales angulo A; erit angulus Θ E B (*per* 10ᵐ I. *bujus*) major angulo I Δ B. Et angulus Θ E B æqualis eſt angulo N E Z: quare angulus N E Z major eſt angulo B Δ I. Fiat angulus Z E X æqualis angulo B Δ I; & erit arcus B I major quam X Z, utpote qui major eſt quam Z N. Sed B I major eſt quam Z E, quia B Δ æqualis eſt ipſi Z E, & B I major eſt quam B Δ: quapropter duci non poteſt, de puncto Z ad arcum E X, arcus circuli magni æqualis arcui I B, qui cadat inter puncta E, X. Cadat igitur extra arcum illum, ſitque arcus Z Π arcui I B æqualis. Jam quoniam in duobus triangulis B Δ I, E Π Z, duo anguli Π E Z, B Δ I ſunt æquales, & æquales ſunt arcus continentes duos alios angulos Π Z E, Δ B I, hoc eſt arcus Δ B ipſi Z E, & B I arcui Z Π æqualis; reliqui vero duo anguli, nempe E Π Z, Δ I B, ſunt minores rectis: erit (*per* 13ᵐ I. *bujus*) reliquus arcus E Π æqualis reliquo Δ I. Ducatur arcus circuli magni N Π. Cumque arcus Π Z, ipſi B I æqualis, major ſit quam Z N; erit angulus Π N Z major angulo N Π Z: quare angulus Π N E multo major erit angulo N Π E, atque adeo arcus Π E major erit arcu E N. Adjiciatur arcus E Θ communis, & duo arcus Π E, E Θ majores erunt duobus N E, E Θ. Sed N E Θ æqualis eſt utriſque B A, Z K; & Π E, E Θ ſunt æquales ipſis Δ I, E Θ: quapropter A B, Z K ſimul ſumpti minores ſunt ipſis Δ I, E Θ ſimul ſumptis. Q. E. D.

Si vero fuerit angulus B A Γ minor recto: dico quoque quod arcus A B, Z K ſimul minores erunt quam E Θ, Δ I.

Angulo enim A exiſtente acuto, tres anguli Δ I Γ, E Θ Γ, Z K Γ ſiunt acuti: adeoque fieri poteſt ut ducantur è punctis B, Δ, E, Z arcus æquales arcubus B A, Δ I, E Θ, Z K, qui pariter cadant inter puncta A, Γ. Sint iſti arcus B X, Δ Λ, E M, Z N: & erunt omnes anguli B X Γ, Δ Λ Γ, E M Γ Z N Γ obtuſi, æquales vero inter ſe. Quoniam vero in triangulo B X Γ angulus

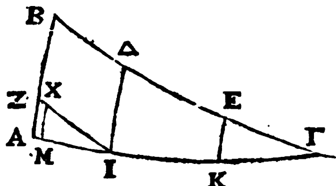
ΧΒΓ non est major recto, & ΓΒ major est quam ΧΒ, & ΒΓ non major est quadrante; angulus autem ΒΧΓ est obtusus,& arcus ΒΔ arcui ΕΖ æqualis est: erunt duo arcus ΒΧ, ΖΝ simul minores duobus arcubus ΔΛ, ΕΜ; ut ostensum



est in proxime præcedentibus. Cum igitur ΒΧ æqualis sit ipsi ΒΑ, & ΔΛ ipsi ΔΙ, & ΕΜ ipsi ΕΘ, & ΖΝ ipsi ΖΚ; erunt duo arcus ΑΒ, ΖΚ simul sumpti minores duobus ΔΙ, ΕΘ simul sumptis. Q. E. D.

Sed in triangulo ΑΒΓ, si capiatur ΒΔ æqualis ipsi ΕΓ, & ducantur arcus ΔΙ, ΕΚ modo superius exposito: dico quod ΑΙ major est quam ΓΚ.

Ad punctum Ι super arcum ΑΙ constituatur angulus ΑΙΖ æqualis angulo Γ: ac manifestum est arcum ΙΖ occurrere arcui ΑΒ, quodque ΙΖ (*per* 3^m^ II. *hujus*) major est quam ΔΒ. Fiat ΙΧ ipsi ΔΒ æqualis, & de puncto Χ ducatur arcus ΧΜ ad basim ΑΓ, ita ut angulus ΧΜΓ sit æqualis angulo Α. Quoniam itaque duo anguli ΕΓΚ, ΕΚΓ trianguli ΕΓΚ sunt æquales duobus ΧΙΜ, ΧΜΙ trianguli ΧΜΙ



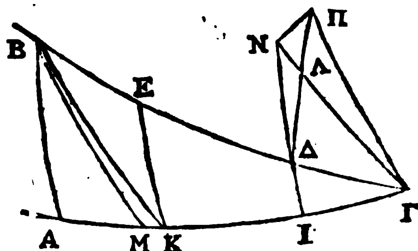
respective; & arcus ΕΓ, ΙΧ sunt etiam æquales, ob arcus æquales ΧΙ, ΔΒ; arcus autem ΓΚ, ΙΜ simul sumpti non sunt æquales semicirculo, neque arcus ΕΚ, ΧΜ: erit (*per* 16^m^ I. *hujus*) arcus ΓΚ æqualis arcui ΙΜ, quo major est arcus ΑΙ; adeoque arcus ΑΙ major est arcu ΓΚ. Q. E. D.

Dico quoque quod ΑΒ minor est utrisque ΔΙ, ΕΚ simul sumptis.

Ponatur arcus ΙΔΝ ipsi ΑΒ æqualis; & jam ostensum est quod ΑΚ major est quam ΙΓ. Fiat igitur ΑΜ æqualis ipsi ΙΓ, & ducantur ΒΜ,ΒΚ, ΓΝ. Jam quoniam ΒΑ æqualis est ipsi ΙΝ, & ΑΜ ipsi ΙΓ, & angulus ΒΑΜ æqualis angulo ΝΙΓ; erit basis ΒΜ æqualis basi ΝΓ. Est autem angulus Α non minor recto, quare arcus ΒΚ major est arcu ΒΜ; & ob ΒΜ æqualem ipsi ΝΓ, erit

arcus

arcus B K major quam N Γ. Pari autem ac in præcedentibus argumento constabit angulum B Δ I majorem esse angulo K E B, ob æquales angulos A K E, A I Δ. Fiat igitur angulus Γ Δ Λ æqualis angulo K E B; & erit B K major quam Γ Λ, quia major quam Γ N: major quoque erit quam Γ Δ, ob B K quam E B majorem, hoc est quam Γ Δ. Hinc manifestum est arcum de Γ ductum ad circulum cujus est arcus Δ Λ, ipsique B K æqualem, non casurum inter



puncta Δ, Λ. Sit ille arcus Γ Π. Quoniam vero arcus Γ B major est quam B A, & Γ B non est major quartâ circuli; erit quidem arcus B K major quam B A, minor vero quartâ circuli: quapropter uterque arcus E B, B K minor est quadrante, & angulus B E K est obtusus, quia angulus A B Γ non major est recto; angulus igitur B K E (*per* 22^m I. *huj.*) acutus est. Cum autem Γ Π æqualis sit ipsi B K, & Γ Δ ipsi E B; erit uterque Γ Δ, Γ Π minor quadrante; & angulus Γ Δ Π est obtusus, quippe æqualis ipsi B E K; adeoque angulus Δ Π Γ etiam acutus est. Quocirca duo triangula B E K, Δ Γ Π duos habent angulos æquales, nempe angulos Γ Δ Π, B E K; & duo latera alium in utroque angulum continentia inter se æqualia, nempe B E ipsi Γ Δ, & Γ Π ipsi B K; reliqui vero duo anguli sunt minores recto: arcus igitur Π Δ (*per* 13^m I. *bujus*) erit æqualis arcui E K. Sed Π Δ major est quam N Δ, adeoque, E K, Δ I simul sumpti superant arcum N Δ I, quem fecimus æqualem ipsi A B. Q. E. D.

Propositio hæc apud Arabes *in quinque diversas subdivisa est, earumque ultima* XIIIma *habetur.*

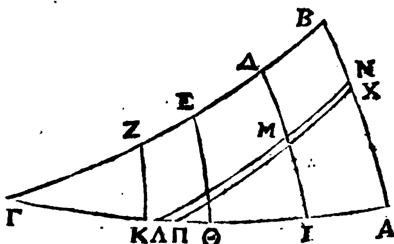
PROP. VII. THEOR.

Si trianguli Sphærici aliquis ex angulis non major fuerit recto, & latera ipsum continentia inæqualia, ita tamen ut majus eorum non excedat quadrantem circuli; & si ab eorum altero ad basim ducantur arcus continentes cum eâ angulos æquales angulo trianguli sub basi & reliquo latere contento; fuerit autem reliquum illud latus

latus una cum tertio & minimo arcu ducto æqualis duobus arcubus intermediis: abscindent hi arcus segmenta inæqualia tam è basi quam è latere illo; quorum quæ propius adjacent lateri reliquo & indiviso majora erunt remotioribus ab eodem.

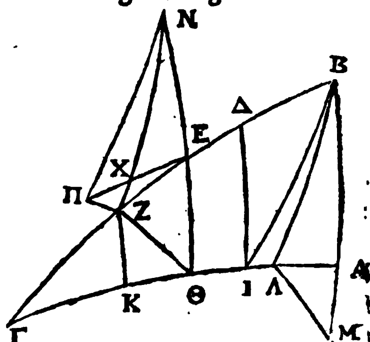
In triangulo Sphærico Α Β Γ sit angulus Β non major recto, & latus Γ Β majus quam Β Α; nec sit Β Γ major quadrante circuli; ducantur autem arcus Δ Ι, Ε Θ, Ζ Κ continentes cum Α Γ angulos æquales angulo Α; ac sint Α Β, Ζ Κ simul æquales arcubus Δ Ι, Ε Θ simul: dico quod Α Ι major est quam Θ Κ, & Β Δ quam Ε Ζ.

Capiatur Ι Λ ipsi Κ Γ æqualis, & ad Λ super arcum Α Λ constituatur angulus Α Λ Ν æqualis angulo Γ. Quoniam vero duo anguli trianguli Ζ Γ Κ sunt respective æquales duobus angulis trianguli Λ Μ Ι, & arcus Γ Κ æqualis est arcui Ι Λ; erit (*per* 14^m^ I. *hujus*) arcus Κ Ζ æqualis arcui Ι Μ. Sed Α Β, Κ Ζ simul sunt æquales ipsis Ι Δ, Θ Ε simul; quare, sublatis æqualibus, Α Β æqualis erit ipsis Θ Ε, Δ Μ simul. Verum (*per* 3^m^ II. *hujus*) Δ Μ major est arcu Β Ν: fiat igitur Β Χ ipsi Δ Μ æqualis, & restabit Χ Α æqualis ipsi Θ Ε. Ducatur arcus Χ Π faciens cum Α Γ angulum æqualem angulo Γ; æqualis igitur erit (*per* 16^m^ I. *hujus*) arcus Α Π ipsi Γ Θ: totus itaque Α Λ major est quam Γ Θ. Atqui Ι Λ æqualis est ipsi Κ Γ: quapropter, sublatis æqualibus, reliquus Α Ι major erit reliquo Θ Κ. Q. E. D.



Existente autem arcu Γ Β majore quam Α Β: dico quod Β Δ major est quam Ε Ζ. Quoniam enim Α Ι demonstratus est major quam Θ Κ, ponatur Α Λ ipsi Θ Κ æqualis; & producatur Β Α ad Μ, ita ut Α Μ sit æqualis ipsi Ζ Κ; & ducantur Β Λ, Β Ι arcus circulorum magnorum: jungatur etiam Ζ Θ arcus circuli magni; & (*per* 4^m^ I. *hujus*) arcus Λ Μ æqualis erit ipsi Θ Ζ. Producto autem Θ Ε, usque dum Ε Ν sit æqualis ipsi Δ Ι, ducatur arcus Ν Ζ: est igitur arcus Β Μ æqualis ipsi Θ Ν. Angulus autem Λ Μ Α (*per ostensa in præced.* 6ta) major est angulo Ζ Θ Ε; quare

re arcus B Δ (*per* 8ᵐ L. *hujus*) major erit quam Z N, atque adeo B I multo major quam Z N. Manifeſtum autem eſt angulum N E Γ majorem eſſe angulo B Δ I: fiat igitur angulus N E X æqualis angulo B Δ I, & erit X N minor quam B I. Sed B I major eſt quam Δ I, hoc eſt, quam N E; quare arcus eductus de N, ad circulum cujus arcus eſt E X, & arcui B I æqualis, non cadet inter puncta E, X. Cadat itaque extra, ad modum arcus N Π. Et quoniam duo triangula B Δ I, N E Π duos habent angulos æquales, nempe angulos N E Π, B Δ I; æquales autem ſunt arcus comprehendentes duos alios eorum angulos, hoc eſt, B I arcui N Π, & Δ I ipſi N E æqualis; reliqui vero anguli non ſunt recti, ſed uterque acutus: manifeſtum eſt (*per* 13ᵐ L. *hujus*) quod arcus E Π æqualis eſt ipſi B Δ. Sed E Π major eſt quam E Z, ob N Π majorem quam Z N; atque adeo B Δ major eſt quam E Z. Q. E. D.



“ *His præmonſtratis, quod in propoſitione ſexta omiſſum videatur hic demonſtrare licet: nempe quod, ſi fuerit latus trianguli diviſum minus indiviſo, erit latus indiviſum, una cum arcu qui adjacet angulo lateri indiviſo oppoſito, majus duobus reliquis intermediis. Si vero, iiſdem poſitis, arcus extremi æquales fuerint intermediis ſimul ſumptis, erit arcus è latere minore abſciſſus, qui adjacet majori, minor eo qui adjacet angulo eidem majori lateri oppoſito.*

Jam vero in triangulo Sphærico A B Γ ſit angulus B non major recto, & latus A B minus quam B Γ, & B Γ non majus quadrante; & capiatur in A B arcus B Δ æqualis arcui E Z, & ducantur Δ I, E Θ, Z K ſub angulis angulo Γ æqualibus: dico quod Γ B, Z K ſimul ſumpti ſuperant ipſos Δ I, E Θ ſimul ſumptos.

Capiantur Γ Λ ipſi I Δ, & Γ M ipſi Θ E, & Γ N ipſi Z K æquales, & ducantur arcus Λ X, M Π, N Ξ, ſub angulis angulo A æqualibus. Jam quoniam B Δ eſt æqualis ipſi E Z, erunt B A, A Z æquales ipſis Δ A, A E ſimul. Cum autem duo triangula Γ Λ X, A I Δ duos

duos habeant angulos unius æquales duobus angulis alterius; arcus vero alteri æqualium angulorum oppositus in uno æqualis sit relativo suo in altero, nempe arcus Λ Γ arcui Δ I; reliqua autem duo latera in utroque non sint æqualia semicirculo: erit (*per* 16^m I. *buj.*) arcus Λ X æqualis ipsi Δ A. Pariterque M Π, E A; N Ξ, Z A erunt æquales; quare A B, N Ξ sunt æquales ipsis Λ X, M Π simul. Hinc (*per jam demonstrata*) B Λ major erit quam M N, atque adeo B Γ, Γ N excedent ipsos Λ Γ, Γ M. Sed Λ Γ æqualis est ipsi Δ I, & M Γ ipsi E Θ, uti N Γ ipsi Z K; quare ipsi B Γ, Z K simul sumpti superant arcus Δ I, E Θ simul sumptos.

Sint autem in hâc figurâ B Γ, Z K simul æquales ipsis E Θ, Δ I: dico quod B Δ minor est quam Z E.

Consimili enim modo capiantur Γ Λ, Γ M, Γ N æquales ipsis Δ I, E Θ, Z K; & ducantur Λ X, M Π, N Ξ, ut fecimus in priore. Quoniam autem B Γ, Γ N æquales sunt ipsis Λ Γ, Γ M; erit B Λ ipsi M N æqualis: unde (*per* 6^m II. *hujus*) A B, N Ξ simul minores erunt ipsis Λ X, M Π simul sumptis. Demonstravimus autem Δ A, E A, Z A æquales esse ipsis Λ X, M Π, N Ξ; adeoque A B, A Z simul minores fient ipsis Δ A, A E: unde patet B Δ minorem esse quam E Z. Nam si utrinque auferatur A Z, restabit B A minor quam Δ A, E Z simul: dein utrinque etiam tollatur arcus E A, & remanebit E B minor quam Δ Z. Denique sublato communi Δ E, erit B Δ minor quam E Z. Q. E. D.

Subdividitur etiam hæc Arabibus in tres diversas, quarum ultima & XVIma. alia Propositio merito censenda est.

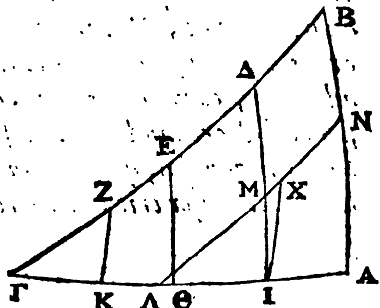
PROP. VIII. THEOR.

Si trianguli Sphærici angulus aliquis non major sit recto, arcus vero continentes illum sint inæquales, neque major eorum excedat circuli quadrantem; & si ducantur à majori eorum ad basim tres arcus circulorum magnorum, quorum duo contineant cum eâ angulos æquales contento sub basi & latere minore; abscindantur autem tam è latere

latere majore quam è basi, segmenta æqualia illis quæ lateri minori adjacent; & per puncta divisionum ducatur arcus tertius: erit angulus contentus sub arcu illo tertio & basi major contento sub basi & arcu minore.

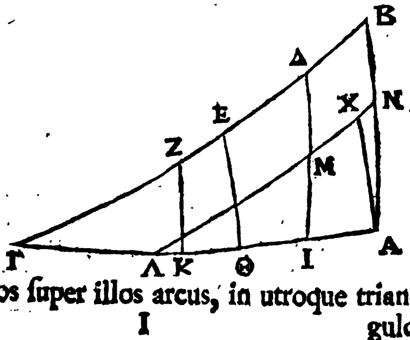
In triangulo Sphærico Α Β Γ sit angulus Β non major recto, & sit Β Γ major quam Β Α, haud major vero quadrante; & ducantur arcus Δ Ι, Ε Θ, Ζ Κ, ita ut anguli Δ Ι Γ, Ε Θ Γ sint æquales angulo Α; fiat autem Θ Κ æqualis arcui Α Ι, & Ε Ζ ipsi Β Δ: dico angulum Ζ Κ Γ majorem esse angulo Α.

Fiat Ι Λ ipsi Γ Κ æqualis, & ad Λ super arcum Α Λ constituatur angulus Α Λ Μ æqualis angulo Γ. Quoniam itaque arcus Α Ι æqualis est ipsi Γ Κ, & Α Ι ipsi Θ Κ; erit totus Λ Α toti Γ Θ æqualis. Anguli autem super arcus illos, in utroque triangulo Ε Γ Θ, Ν Λ Α sunt respective, æquales; quare (*per* 14ᵐ I. *huj.*) arcus Ε Γ æqualis erit ipsi Ν Λ. Verum Ν Μ major est quam Ε Ζ, quia (*per* 3ᵐ II. *hujus*) major quam Β Δ. Fiat igitur Ν Χ æqualis ipsi Β Δ, & ducatur Ι Χ. Cum autem reliquus Λ Χ æqualis sit ipsi Ζ Γ, & arcus Γ Κ, Λ Ι sint æquales, uti & angulus Γ angulo Χ Λ Ι æqualis; erunt arcus Ι Χ, Ζ Κ æquales, atque angulus Ζ Κ Γ angulo Χ Ι Λ. Sed angulus Χ Ι Λ major est angulo Μ Ι Γ angulo Α æquali; angulus igitur Ζ Κ Γ major est angulo Α. Q. E. D.



Quod si angulus Ζ Κ Γ & alteruter è duobus angulis Δ Ι Γ, Ε Θ Γ fuerint æquales angulo Α, cæteris manentibus: dico quod angulus reliquus minor erit angulo Α.

Fiat enim Ι Λ ipsi Γ Κ æqualis, & ad Λ super Α Λ constituatur angulus Ι Λ Μ æqualis angulo Γ; & ob arcus Γ Κ, Λ Ι æquales, sicut & duos angulos super illos arcus, in utroque triangulo

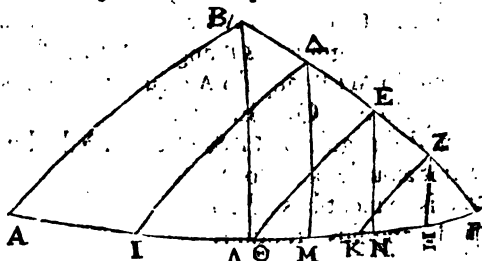


gulo Γ Z K, Λ M I, etiam æquales; erit Z Γ ipsi Λ M æqualis. Major autem est M N quam B Δ: fiat igitur M X æqualis ipsi B Δ, & erit Λ X æqualis ipsi Γ E. Quoniam igitur Γ K, Λ I sunt æquales, uti & K Θ, I A æquales; erunt toti Γ Θ, Λ A æquales. Et X Λ, Γ E sunt æquales; adeoque E Γ, Γ Θ sunt æquales ipsis X Λ, Λ A, respective. Et angulus E Γ Θ æqualis est angulo X Λ A; quare basis E Θ æqualis est basi X A, & angulus X A Λ æqualis est angulo Γ Θ E. Angulus autem X A Λ minor est quam B A Λ: angulus igitur Γ Θ E minor est angulo B A Γ. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

Si trianguli Sphærici uterque angulorum ad basim fuerit acutus, & uterque arcuum eosdem subtendentium minor quartâ circuli; & in eorundem non majore capiantur arcus æquales, à quorum extremitatibus ducantur arcus ad basim, continentes cum ea angulos æquales contento sub basi & arcu indiviso: abscindent hi arcus è basi portiones inæquales, quarum quæ propior est arcui indiviso trianguli major erit remotiore ab eodem.

In triangulo Sphærico A B Γ, sit uterque angulorum Γ A B, A Γ B acutus, & utrumque crus A B, B Γ minus quadrante; & in crure B Γ, quod non sit majus altero, capiantur duo arcus æquales B Δ, E Z, & ducantur arcus circulorum magnorum Δ I, E Θ, Z K, occurrentes arcui Γ A sub angulis æqualibus angulo A: dico quod A I major est quam Θ K.

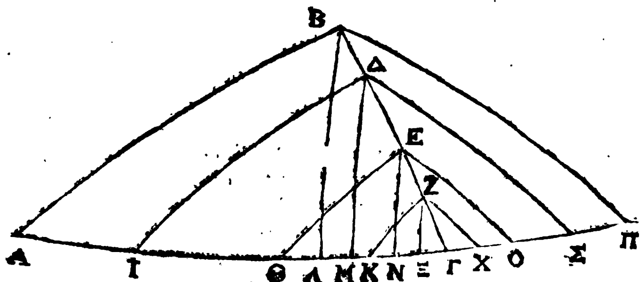


Sit primo A B æqualis ipsi B Γ, & de punctis B, Δ, E, Z demittantur ad angulos rectos super basim A Γ arcus B Λ, Δ M, E N & Z Ξ; cumque A B æqualis sit ipsi B Γ, & B Λ normalis super A Γ, erunt A Λ, Λ Γ æquales; quare A Γ duplus est ipsius A Λ: pariter Γ I duplus ipsius Γ M. Et quoniam excessus arcus A Γ supra Γ I duplus est excessûs dimidii ipsius A Γ supra dimidium

arcus Γ I, sive ipsius Α Γ supra Γ Μ; & excessus Α Γ supra Γ I est arcus Α I, uti excessus arcus Α Γ supra Γ Μ est arcus Α Μ, erit Α I duplus ipsius Α Μ. Pari argumento cum Γ Θ duplus sit ipsius Γ Ν, & Γ Κ duplus arcus Γ Ξ, erit excessus ipsius Γ Θ supra Γ Κ duplus excessûs dimidiorum eorundem, sive arcus Γ Ν supra Γ Ξ: erit igitur arcus Θ Κ duplus ipsius Ν Ξ. Jam quoniam triangulum Α Β Γ habet angulum Β dimidium anguli Α Β Γ, adeoque non majorem recto; & latus Γ Β majus quam Β Α, & Γ Β non major est quartâ circuli; & Β Δ æqualis est ipsi Ε Ζ, & Δ Μ, Ε Ν, Ζ Ξ cadunt super arcum Α Γ ad angulos æquales angulo Β Α Γ: erit (per prius demonstrata, in 6ta II. *hujus*) arcus Α Μ major quam Ν Ξ. Sed Α I duplus est ipsius Α Μ, & Θ Κ duplus ipsius Ν Ξ: quocirca major erit arcus Α I quam Θ Κ. Q. E. D.

Sit jam arcus Β Γ minor quam Β Α: dico quod sic etiam Α I major erit quam Θ Κ

Quoniam Β Γ minor est quam Β Α, angulus Α minor est angulo Γ, & anguli Δ I Γ, Ε Θ Γ, Ζ Κ Γ sunt singuli æquales angulo Α, adeoque minores angulo Γ; unde Γ Δ minor est quam Δ I, & Γ Ε quam Ε Θ, & Γ Ζ quam Ζ Κ: quare fieri potest ut ducantur à punctis Β, Δ, Ε, Ζ arcus æquales arcubus Α Β, Δ I, Ε Θ, Ζ Κ ad arcum Α Γ, qui cadant extra punctum Γ. Sint hi arcus Β Π,



Δ Σ, Ε Ο, Ζ Χ: & de punctis Β, Δ, Ε, Ζ demittantur arcus normales ad Α Γ. Quoniam vero angulus Β Γ Α est acutus, erit arcus Α Γ major quam Π Γ, uti I Γ quam Γ Σ, & Γ Θ quam Γ Ο, & Γ Κ quam Γ Χ; cadentque normales inter puncta Α, Γ. Sint normales hi arcus Β Λ, Δ Μ, Ε Ν, Ζ Ξ: erit igitur arcus Α Π duplus arcus Π Λ, & arcus I Σ duplus ipsius Σ Μ; ac propterea excessus ipsius Α Π supra I Σ, hoc est arcus Α I, Π Σ simul, duplus erit excessûs dimidii ipsius Α Π supra dimidium ipsius Σ I, hoc est ipsius Π Λ supra Σ Μ, nempe arcus Μ Λ, Σ Π simul. Pari

 modo

modo quia Ο Θ duplus eſt arcûs Ο Ν, & Κ Χ duplus ipſius Ξ Χ; exceſſus arcus Θ Ο ſupra Κ Χ, hoc eſt Ο Χ, Κ Θ ſimul, duplus erit exceſsûs dimidii ipſius Ο Θ ſive Ο Ν ſupra dimidium ipſius Κ Χ ſive Χ Ξ, hoc eſt Ν Ξ, Ο Χ ſimul. Quoniam vero angulus Γ Β Λ minor eſt recto, manifeſtum eſt arcum Β Γ majorem eſſe arcu Β Λ; nec Β Λ neque Β Γ excedere quadrantem. Sed Β Δ æqualis eſt ipſi Ε Ζ; & arcus Δ Μ, Ε Ν, Ζ Ξ faciunt angulos æquales angulo Λ: quare (*per* 6[m] II. *huj.*) arcus Λ Μ major eſt quam Ν Ξ. Et quoniam in triangulo Λ Β Π normalis de Β demiſſus cadit inter puncta Λ, Γ, erit angulus Π Β Γ minor dimidio anguli Λ Β Π, adeoque angulus Π Β Γ non eſt major recto. Uterque autem arcuum Γ Β, Β Π minor eſt quadrante, & arcus Β Δ æqualis eſt ipſi Ε Ζ, ac ducuntur arcus Δ Σ, Ε Ο, Ζ Χ ſub angulis angulo Π æqualibus ſuper arcum Π Γ; erit igitur (*per* 6[m] II. *hujus*) arcus Π Σ major quam Ο Χ. Nuper autem demonſtravimus Λ Ι, Π Σ ſimul duplum eſſe ipſorum Μ Λ, Σ Π ſimul, hoc eſt duplum arcus Λ Μ cum duplo ipſius Π Σ ſimul æqualem eſſe arcubus Λ Ι, Π Σ ſimul; ac ſublato communi Π Σ, reſtabit Λ Ι æqualis ipſi Π Σ una cum duplo ipſius Λ Μ. Eodem argumento erit Κ Θ æqualis arcui Ο Χ cum duplo ipſius Ξ Ν. Oſtenſum autem eſt Λ Μ majorem eſſe quam Ξ Ν, adeoque duplum ipſius Λ Μ majorem duplo ipſius Ν Ξ, & Π Σ majorem quam Ο Χ: quapropter Π Σ una cum duplo ipſius Μ Λ, qui ſimul æquales ſunt arcui Λ Ι, major eſt arcu Ο Χ una cum duplo ipſius Ξ Ν, qui ſimul æquales ſunt ipſi Θ Κ: quare Λ Ι major eſt quam Θ Κ. Q. E. D.

NB. *Has novem Propoſitiones nonnulli è Codicibus olim Libro primo tribuerunt; adeoque in Codice* Hebræo, *unde facta eſt hæc traductio, duplici ordine numerantur; atque hæc ultima tam ut IX*[na] *ſecundi quam XLIV*[ta] *primi ſignata eſt. Dein quaſi hic inciperet Liber ſecundus, ſub novo Titulo, novaque Propoſitionum ſerie, ſubjiciuntur quatuor Theoremata, eadem ipſa quæ in quatuor præcedentibus oſtenſa ſunt quaſi ad verbum referentia, eodemque modo demonſtrata.*

Qui ſit uſus hujus recapitulationis ſane non liquet, quapropter loco haud alieno viſum eſt Scholion *inſerere, totius rei ſummam paulo plenius & accuratius exhibiturum.*

SCHOLION.

Recte quidem cautum eſt à Menelao *in ultimis Propoſitionibus, ne angulus ſub cruribus contentus major ſit recto; neve crus majus, in quo ſumuntur arcus æquales, vel ad quem ducuntur arcus cum baſi angulos æquales conſtituentes, excedat circuli quadrantem: aliter enim incidiſſet in ambiguum, ob Dioriſmum*

rismum in Sphæricis satis difficilem, & ut videtur Veterum methodis inaccessum. Euclides *enim in* Phænomenis, *& post eum* Hipparchus, *nihil protulere de Zodiaci signis maximo tempore orientibus : ejusque rei rationem reddens* Pappus *Prop.* 56. *Lib.* VI. Collect. Math. *hæc habet,* ἐπιτέτακται γὰρ ἡ ζήτησις καὶ ἀνεγράφη εἰς τὰς ἀνατολικὰς διαιρέσεις. *Idemque* Pappus *eo loci testatur* Menelai *nostri hac de re exstitisse dissertationem, quæ temporum injuria olim periisse videtur.*

Nequid autem hac in parte desideraretur, Diorismum hunc plenius assecuti sumus; ac rem Sphærica tractantibus adhuc intactam accuratius perpendere constituimus. Ignoscat tamen Lector si in hoc Parergo nonnulla assumpserimus Auctoris nostri ævo nondum comperta.

Pone arcum ΑΓ *basim esse trianguli* ΑΒΓ, *apud quam fiunt constantes anguli, latus indivisum* ΑΒ, *divisum vero* ΒΓ; *ac sit uterque angulus* Α, Γ *acutus,* Α *vero primo major sit quam* Γ. *Producantur arcus* ΑΓ, ΓΒ *ad occursum in* Δ, *& bisecetur semicirculus* ΓΔ *in puncto* Ε, *& ducatur arcus* ΕΖ, *constituens cum* ΑΓ *angulum æqualem angulo* Α; *& erit* ΕΖ, *maximus arcuum sub eodem angulo inter arcus* ΔΒΓ, ΔΑΓ *ducendorum. Arcui*

autem ΑΒ *quam proximè ducatur sub eodem angulo arcus* ΘΗ, *qui productus occurrat arcui* ΑΒ *producto in puncto* Μ: *& centro* Μ, *intervallo* ΜΒ, *describatur arcus circuli minoris* ΒΛ; *eodemque centro & intervallo* ΜΛ *describatur arcus circuli* ΑΚ; *qui magnus erit circulus, quia* (per 10[m] I. huj.) *arcus* ΑΜ, ΜΗ *simul sumpti sunt æquales semicirculo. erit igitur arcus momentaneus* ΑΚ *ad momentaneum* ΒΛ *sicut semidiameter Sphæræ ad semidiametrum circuli cujus arcus est* ΒΛ, *hoc est ad sinum arcus* ΜΒ, *qui complementum est arcus* ΑΒ *ad quadrantem. Est autem arcus* ΒΛ *ad arcum* ΘΒ *sicut sinus anguli* Β *ad radium: ex æquo itaque arcus* ΑΚ

ad

ad Θ B *erit sicut sinus anguli* B *ad sinum complementi arcus* A B. *Sed arcus momentaneus* A H *est ad* A K *sicut radius ad sinum anguli* A; *ratio igitur arcus* A H *ad* Θ B *componitur ex ratione quam habet sinus anguli* B *ad sinum arcus* M B, *& ex eâ quam habet radius ad sinum anguli* A. *Manente autem angulo* A, *ratio radii ad sinum anguli* A *data est: proinde abicumque ducatur arcus* A B *inter semicirculos* Δ E Γ, Δ A Γ; *si fiat ut sinus anguli* B *ad sinum arcus* M B *ita* A H *ad quartam proportionalem, erit ea quarta semper in data ratione ad* B Θ, *nempe in ratione radii ad sinum anguli* A.; *atque adeo ubi maxima fuerit ratio sinus anguli* B *ad sinum ipsius* M B, *ibi quoque* maxima *erit ratio arcuum momentaneorum* A H *ad* Θ B.

Concipe jam arcum A B *motu æquabili ferri de* Γ *ad* Δ *inter arcus* Γ E Δ, Γ A Δ, *manentibus angulis* A *&* Γ; *ac manifestum est continue augeri arcum* A B, *usque dum* B *ad* E *feratur, &* A *ad* Z; *atque adeo sinum arcus* M B *eousque minui, minimumque fieri coëuntibus punctis* B, E: *ultra vero* E *augeri. Angulus autem* B *continue augetur, & apud* E *in omni casu fit recto major: ubique etiam recto major est, si anguli* A, Γ *simul minores fuerint recto. Si vero simul majores fuerint recto, angulus* B *de* Γ *prodiens fit primo acutus, dein rectus, ac denique obtusus, priusquam* B *ad* E *pervenit. Anguli autem acuti sinus aucto angulo augetur, obtusi vero sinus eo aucto minuitur, uti manifestum est.*

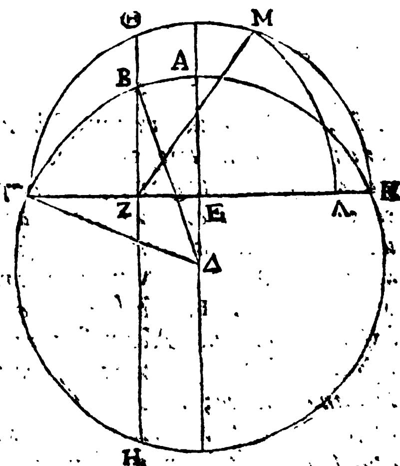
Ut igitur habeatur ratio maxima *sinus anguli* B *ad sinum arcus* M B, *simul augeri vel simul minui debent sinus isti in eadem ratione quam habent inter se. In quadrante autem* E Δ *minuitur sinus anguli obtusi* B, *interea dum augetur sinus arcus* B M; *atque adeo in toto illo quadrante ratio arcuum momentaneorum* A H *ad* Θ B *minuitur, minimaque fit in puncto* Δ. *In quadrante vero* E Γ, *si anguli* A, Γ *simul minores fuerint recto,*

erit

erit angulus B semper obtusus; vel si majores recto fuerint, in ea saltem parte quadrantis Γ E, quae versus E, erit angulus ille obtusus; ac proinde minuitur sinus ejus, interea dum sinus arcus M B etiam decrescit. Quoties igitur fieri potest ut inter E, Γ inveniatur situs arcus A B, talis ut sinus arcus M B in eadem ratione minuatur qua sinus anguli B; angulus A B Γ semper obtusus fit, arcusque B Γ quadrante minor. Si igitur B Γ minor fuerit quadrante, ac simul angulus A B Γ recto major; vel si angulus A B Δ fuerit recto minor, & arcus B Δ quadrante major, incidere possumus in ambiguum supra dictum: Menelaus igitur in praecedentibus Propositionibus non sine causa admonuit arcum divisum B Γ quadrante majorem non esse debere, neque angulum A B Γ majorem recto.

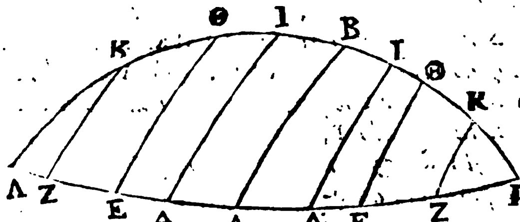
Ut autem in omni casu cognoscatur punctum B, tale ut arcus momentaneus A H ad arcum B Θ maximam obtineat rationem, manentibus scilicet angulis A & Γ, compositio satis expedita habebitur universim, ad hunc modum.

Centro Δ describatur circulus A Γ H K, ac fiat angulus A Δ B aequalis angulo Γ, angulusque A Δ Γ angulo A aequalis; & ponatur arcus A K arcui A Γ aequalis, & jungatur recta Γ K occurrens ductae A Δ in puncto E, quo bisecta est Γ K: & per B ipsi A Δ parallela ducatur recta B H occurrens ipsi Γ K ad angulos rectos in puncto Z. Dein centro E, radio Γ E, describatur semicirculus Γ Θ M K, cui conveniat recta B H producta in puncto Θ; & erit Z Θ media proportionalis tam inter Z H, Z B, quam inter Z Γ, Z K. Capiatur etiam Z Λ media proportionalis inter Z Θ, Z H; & erit Z Λ maxima è tribus mediis proportionalibus inter Z H, Z B, sive inter summam & differentiam sinuum complementorum arcuum A B, A Γ ad quadrantes. Denique centro Z, intervallo Z Λ, describatur arcus circuli Λ M, occurrens semicirculo Γ Θ K in M, & ducatur recta Z M: dico arcum



arcum M Λ *similem esse arcui* B Γ *in praecedente figura; hoc est, angulum* K Z M, *quem subtendit arcus* M K, *aequalem esse angulo ad centrum Sphaerae, quem subtendit dictus arcus* B Γ; *quoties ita divisus sit quadrans* Γ E *in* B, *ut ratio arcus* A H *ad* Θ B maxima *fiat*.

Invento autem hoc Diorismo, jam paulo audentius hujus Libri Secundi Theoremata aliqua proponere, pleniusque exsequi licebit. Manentibus enim angulis acutis A, Γ, *quorum* A *major sit, productisque lateribus* Γ A, Γ B *ad occursum in* Λ; *inveniatur punctum* B *in semicirculo* Γ B Λ, *juxta praescriptum Regulae praecedentis; ita ut arcus* A B *situs sit, ubi maxima sit ratio momentorum. Jam si ab utraque parte ipsius* A *capiantur duo arcus aequales, ut* A Δ, E Z, *vel in basi* A Γ *vel in* A Λ; *ac ducantur ad latera* B Γ *vel* B Λ *arcus* Δ I, E Θ, Z K: *manifestum est arcum* B I, *in utroque casu, minorem esse arcu* Θ K; *tametsi arcus* B A *major sit quadrante, atque angulus* A B Γ *major*



recto; contra quod cautum est in Prop. V^ta hujus. *Puncto enim* A *motu aequabili lato, velocitas puncti* B, *usque dum limitem quem diximus attigerit, gradatim minuitur; atque adeo arcus, ea velocitate in eodem tempore descripti, continue decrescunt: ultra vero dictum limitem versus* Λ *denuo crescunt, interea dum punctum* A *ad* Λ *transfertur. Ad* Λ *autem maxima fit velocitas puncti* B, *respectu ejus quam habet punctum* A *juxta basim* A Λ *latum. Nec refert an alter arcuum aequalium in ipso* A Γ *vel* A Λ *sumptorum fuerit punctis* Γ, A *vel* A, Λ *conterminus, necne; neve an fuerint arcus aequales continui aut disjuncti, aut ex parte intercepti ab invicem; modo arcus* Δ I *remotior fuerit à communibus intersectionibus* Γ *aut* Λ *quam est arcus* Z K.

Eodemque modo, si ponatur punctum B *motu aequabili ferri per arcum* Γ B Δ, *manifestum est ex praemissis spatia descripta motu puncti* A *inaequalia fieri; eoque motu gradatim aucto,*

juxta Λ *velocitatem ejus maximam provenire. Unde si in crure trianguli majori* ΒΓ *vel* ΒΛ *capiantur ab utraque parte ipsius* Β *duo arcus æquales* ΒΙ, ΘΚ; *ac ducantur ad basim arcus* ΙΔ, ΘΕ, ΚΖ; *erit segmentum basis* ΑΔ *ab iisdem interceptum majus intercepto* ΕΖ; *quocunque ordine capiantur dicti arcus æquales, modo sint inter* Β, Γ *vel* Β, Λ, *ac* ΚΖ *propior fuerit intersectioni basis & cruris divisi quam arcus* ΔΙ. *Quod quidem ex parte tantum demonstratum dedit* Menelaus *in* VI*a* *hujus.*

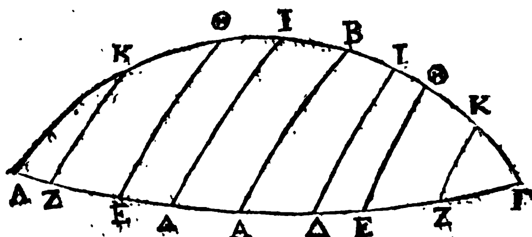
Fieri autem potest ut maxima trium medie proportionalium, inter summam & differentiam Sinuum complementorum utriusque anguli Λ, Γ *ad angulos rectos, major sit quam summa Sinuum ipsorum angulorum, id est, in* Fig. pag. 71, *ut* ΖΛ *major sit quam* ΖΚ, *quo in casu circulus centro* Ζ *intervallo* ΖΛ *descriptus minime occurret semicirculo* ΓΘΚ. *Hoc quoties sit, Diorismus de quo agitur locum non habet; atque ubicunque sumpseris duos arcus æquales in basi* ΓΑΛ, *ac duxeris ad semicirculum* ΓΒΛ *arcus, ut prius; erit segmentum illud ex eodem abscissum, quod propius est angulo* Γ, *minus altero ab eodem remotiore: motus enim puncti* Β *omnium tardissimus fit ad* Γ, *uti semper velocissimus ad* Λ. *Ac propterea talibus existentibus angulis* Λ *&* Γ, *si capiantur arcus æquales utcunque in semicirculo* ΓΒΛ; *ac ducantur ab eorum terminis ad basim arcus cum eadem angulos æquales angulo* Λ *constituentes: manifestum est segmentum illud basis, ab iisdem interceptum, quod propius est angulo* Γ, *majus esse segmento altero, remotiore scilicet ab eodem.*

Hæc autem accidere nequeant, nisi angulus Γ *haud major sit angulo cujus sinus æquatur trienti radii, hoc est angulo* 19gr. 28′. 16″; *in quo casu extremo angulus* Λ *fit* μοναχὸς, *estque* 35gr. 15′. 52″; *cujus sinus potest trientem quadrati radii. Si vero angulus* Γ *minor fuerit prædicto, utrinque limitibus coercetur angulus* Λ; *ut si, exempli gratia,* Γ *sit* 19 *graduum, angulus* Λ *major esse nequit quam* 41gr. 41′. 42″, *nec minor quam* 29°. 18′. 18″, *si puncti* Β *velocitas, respectu ejus quam habet punctum* Λ, *minima fuerit in puncto* Γ. *Universim autem, posita* t *æquali tangenti complementi anguli dati* Γ *ad rectum, &* r = *radio, duæ radices sive* z *in hac æquatione* $z^4 + tz^3 - rrtz + r^4 = 0$ *erunt tangentes semisummæ angulorum* Γ *&* Λ *in utroque casu, unde & uterque an-*

K gulus

gulus Α *datus erit. Nec video an leviori opera hæc omnia accuratè definiri queant. Observandum tamen duos illos angulos* Α *una cum angulo* Γ *simul sumptos conficere angulum rectum: cujus rei demonstrationem nondum assecutus sum.*

Si vero angulus Α *æqualis vel minor fuerit angulo* Γ, *eadem ipsa evenient quæ in prius descriptis, sed absque interveniente Diorismo. Nam si punctum* Β *motu æquabili feratur per arcum* Γ Β Α, *velocitas puncti* Α *continuo augebitur, ac proinde arcus, velocitatibus illis æqualibus temporibus descripti, quo lon-*



gius absunt à puncto Γ, *eo majores fiunt: id quod à* Menelao *in* 4ta *&* 9na *hujus docetur. Idem etiam dicendum, si angulus* Γ *fuerit obtusus,* Α *vero minor eo qui ipsi* Γ *deinceps est. Arcus autem divisus* Β Γ, *in utroque casu, major esse nequit eo cujus sinus est ad radium sicut sinus anguli* Α *ad sinum anguli* Γ, *existente scilicet arcu* Α Β *quadrante circuli.*

Restat jam ut paucula subjiciam de altera parte harum Propositionum; nempe quod si capiantur duo arcus æquales in latere trianguli majore, ac ducantur ad basim arcus cum eadem angulos æquales constituentes, erunt duo extremi ex his ductis arcubus simul sumpti minores duobus intermediis: E contra vero, si sumantur arcus illi è minore latere, erunt arcus extremi majores intermediis simul sumptis. Horum prius verum quidem est in omni casu absque limite, nec refert an angulus Β *fuerit obtusus vel acutus, aut* Β Γ *major vel minor quadrante, modo angulus* Α *major sit angulo* Γ. *In altero vero ubi angulus* Γ *major est angulo* Α, *sive* Γ *obtusus fuerit vel acutus, arcus indivisus & è quatuor ductis maximus non major esse potest quadrante, eoque necessario minor est arcus divisus* Β Γ, *uti recte monitum est in ultima parte Prop.* VII^{mæ} *hujus.*

Denique si capiantur in basi duo arcus æquales, ac ducantur ad latus alterutrum cujuscunque trianguli Sphærici quatuor

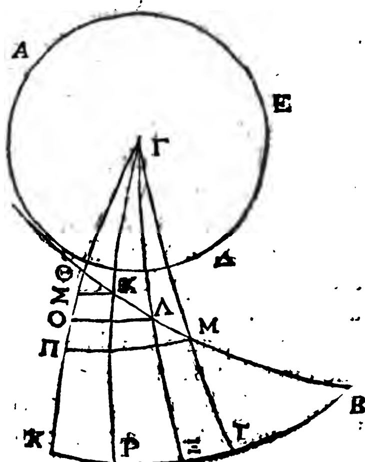
tur arcus continentes cum basi angulos æquales, erit in omni casu summa arcuum intermediorum major extremis simul sumptis, absque conditionibus quæ requiruntur in Propositione V^ta. *Sed ad* Menelaum *redeamus.*

His igitur præmonstratis, sequentia subjunximus ad verificanda ea quæ habentur in libro *Theodosii* de Sphæra, cum eorundem conversis: sed modo magis universali & qui assensum extorqueat, tam ad stabilienda principia, quam ad demonstranda ea quæ prius scripta sunt; quorum quidem nonnulla vix satis firma videntur.

PROP. X.

Si fuerit in Sphæra circulus magnus quem tangit aliquis è circulis parallelis; & capiantur in eo duo arcus æquales inter punctum contactûs & maximum parallelorum; & describantur per terminos horum arcuum, tam circuli paralleli, quam circuli magni prodeuntes è polo: tum abscindent hi circuli paralleli ex iis qui de polo ducuntur arcus inæquales, quorum qui maximo parallelorum propior est major erit remotiore. Et præterea portio illa maximi parallelorum circulis de polo ductis abscissa, quæ propior est communi circuli obliqui & circuli parallelorum maximi intersectioni, minor erit remotiore ab eadem

Sit Θ M B circulus magnus Sphæræ, quem contingat aliquis circulorum parallelorum A Δ E, sitque parallelorum maximus B T Ξ Ρ X; & in ipso Θ B capiantur duo arcus æquales Θ K, Λ M; & per polum Γ perque puncta Θ, K, Λ, M ducantur arcus circulorum magnorum Γ Θ X, Γ K Ρ, Γ Λ Ξ, Γ M T; jungantur etiam circuli paralleli transeuntes per puncta K, Λ, M, nempe arcus K Σ, Λ O, M Π:



 Dico

dico quod arcus ΠΟ major est arcu ΣΘ, quodque arcus ΧΡ major est arcu ΞΤ.

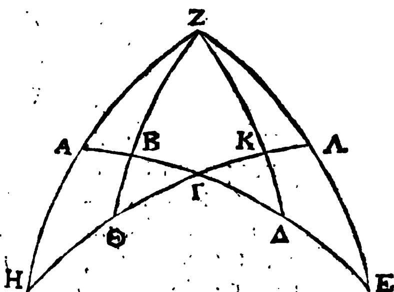
Quoniam enim ΜΓΘ triangulum est Sphæricum, cujus crus ΜΓ majus est crure ΓΘ; ac utrumque minus est quadrante; & in ΘΜ sumuntur arcus æquales ΘΚ, ΛΜ; necessario consequitur, per ea quæ demonstravimus in 33ª I. & 7ma II. hujus, angulum ΘΓΚ majorem esse angulo ΛΓΜ, atque arcum ΧΡ majorem arcu ΞΤ; quodque arcus ΜΓ, ΓΘ simul sumpti superant ipsos ΛΓ, ΓΚ simul sumptos; unde manifestum est arcum ΠΟ majorem esse arcu ΣΘ.

NB. *Hanc propositionem Vtam & VItam & IXtam Lib. III. Sphæricorum* Theodosii *complecti.*

PROP. XI.

Sese intersecent duo circuli in Sphæra maximi, & in eorum uno capiantur duo arcus æqualiter distantes à puncto sectionis duorum illorum circulorum; & per terminos horum arcuum, perque polos alterutrius circulorum, transeant circuli maximi: abscindent hi circuli ex altero circulorum primorum arcus æquales.

Sint ΑΒΕ, ΗΘΛ duo circuli magni Sphæræ, sese intersecantes in puncto Γ, & in uno illorum capiantur arcus ΑΒ, ΔΕ æqualiter distantes à puncto Γ; & ducantur arcus circulorum magnorum transeuntes per puncta Α, Β, Δ, Ε, & per Ζ polum alterutrius circulorum ΑΒΕ, ΗΓΛ; sint autem hi arcus ΖΑΗ, ΖΒΘ, ΖΚΔ, ΖΛΕ: dico arcum ΗΘ æqualem esse arcui ΚΛ.



Ponamus primo Ζ polum esse circuli ΑΒΔΕ, quare uterque angulus ΓΑΗ, ΛΕΓ erit rectus. Et angulus ΛΓΕ æqualis est angulo ΑΓΗ; atque etiam arcus ΑΓ æqualis est arcui ΓΕ: quare arcus ΓΗ æqualis est arcui ΓΛ. Pari argumento constabit

ſtabit arcum Θ Γ æqualem eſſe arcui Κ Γ; reliquus igitur arcus Θ Η æqualis eſt arcui Κ Λ.

Ponamus autem punctum Ζ polum eſſe circuli Λ Γ Η; & erunt duo anguli Λ Η Γ, Γ Λ Ε recti. Angulus autem Λ Γ Η æqualis eſt angulo Λ Γ Ε, uti arcus Λ Γ æqualis arcui Γ Ε; & duo arcus Λ Η, Λ Ε ſimul ſumpti non ſunt æquales ſemicirculo, quia uterque eſt quadrante minor: arcus igitur Η Γ (*per* 16^m I.*huj.*) æqualis eſt arcui Γ Λ. Ac ſimili modo demonſtrabitur arcum Θ Γ æqualem eſſe arcui Γ Κ: arcus igitur reliquus Θ Η æqualis eſt Κ Λ. Q. E. D.

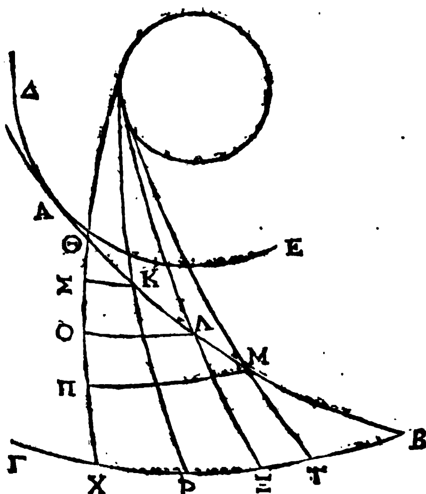
Hæc eſt 13^a III. *Sphæricorum* Theodoſii.

PROP. XII.

Si fuerit circulus Sphæræ maximus, quem contingat aliquis è circulis parallelis; & inter punctum contactus & parallelorum maximum capiantur duo arcus æquales; & ducantur arcus circulorum per terminos ſumptorum arcuum tranſeuntes, quorum aliqui ſint arcus circulorum parallelorum, aliqui vero magnorum vel per parallelorum polos tranſeuntium, vel unum aliquem eundemque circulum parallelum, ſed priori parallelo minorem, contingentium, & ad eaſdem partes ſuper maximum parallelorum, ad quas inclinat circulus obliquus prius dictus, inclinantium: tum circuli paralleli ſic ducti abſcindent è maximis ductis arcus inæquales, quorum qui propior eſt circulo è parallelis maximo major erit remotiore. Quinetiam portiones in maximo parallelorum abſciſſæ, quæ propiores ſunt communi circuli illius cum circulo obliquo primario interſectioni, minores fient iis quæ ab eâdem longius diſtant.

Sit circulus Sphæræ magnus Α Μ Β, quem contingat aliquis è circulis parallelis Α Δ Ε, & ſit maximus parallelorum Γ Χ Ρ Ξ Τ Β; & in circulo Α Μ Β capiantur duo arcus æquales Θ Κ, Λ Μ; & deſcribantur circulorum arcus tranſeuntes per horum terminos, è parallelis quidem arcus Κ Σ, Λ Ο, Μ Π, è magnis vero, Κ Ρ, Λ Ξ, Μ Τ, vel per polos eorum tranſeuntes, vel qui omnes contingant

tingant eundem circulum parallelum minorem circulo ΑΔΕ, & ad idem latus ad quod inclinat circulus ΑΜΒ inclinati sint super circulum ΓΒ: dico quod ΠΟ major est quam ΘΣ, & ΧΡ quam ΞΤ.



Quoniam angulus ΘΒΓ minor est recto, angulus vero ΘΧΒ non minor recto, erit arcus ΘΧ minor arcu ΘΒ. Cum itaque triangulum ΒΘΧ habet crus ΒΘ majus crure ΘΧ, neque ΒΘ majus est quadrante circuli, nec angulus Θ major est recto, & ex arcu ΒΘ abscissi sunt duo arcus æquales ΘΚ, ΛΜ; ducuntur etiam arcus ΚΡ, ΛΞ, ΜΤ constituentes cum basi ΒΓ angulos æquales angulo ΘΧΒ eidem relativo: & erit arcus ΧΡ (*per 7m II. hujus*) major arcu ΞΤ, & erunt duo arcus ΘΧ, ΜΤ simul sumpti minores duobus arcubus ΚΡ, ΛΞ simul sumptis; hoc est, arcus ΘΧ, ΧΠ simul sumpti minores erunt ipsis ΣΧ, ΧΟ simul sumptis. Hinc constabit ΠΟ majorem esse arcu ΘΣ. Angulus autem ΒΘΧ non major erit recto, uti dictum est, quia in triangulo ΒΧΘ angulus ad Χ non minor est recto, latera vero alium ejus angulum, nempe angulum ad Θ, continentia sunt singula minora quadrante circuli. Demonstratum autem est in libro primo Prep. XXI, quod, si hæc ita se habeant, angulus contentus ΒΘΧ non major erit recto Q. E. D.

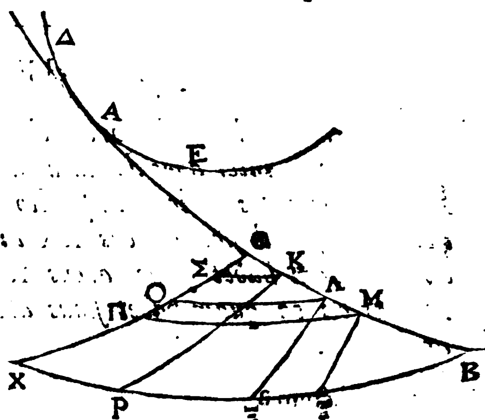
Hinc VIImi & VIIIva Libri III. Theodosii demonstrantur.

PROP. XIII.

Si in Sphæra fuerit circulus magnus quem contingat aliquis è circulis parallelis, & inter punctum contactus & maximum parallelorum capiantur in eo duo arcus æquales, per quorum terminos ducantur circuli, quorum aliqui sint paralleli, aliqui vero circuli maximi qui contin-

contingant unum eundemque è parallelis parallelo vero priori majorem; neque opus est ut sit inclinatio ejus ad easdem partes ad quas inclinat circulus ille primarius, in quo sumpsimus arcus æquales: tum circuli paralleli abscindent è circulis maximis ductis arcus inæquales, quorum minor erit qui propior est parallelorum maximo. Abscindent etiam iidem circuli magni è maximo parallelorum arcus inæquales, quorum qui propior est communi circuli magni primarii & maximi parallelorum intersectioni, minor erit remotiore ab eadem.

Tangat enim circulum maximum A B circulus aliquis è parallelis unus, qui sit A Δ E; maximus autem parallelorum sit B Ξ X, & in arcu A B capiantur duo arcus æquales Θ K, Λ M; per quorum terminos describantur circuli paralleli K Σ, Λ O, M Π, aliique circuli maximi Θ X, K P, Λ Ξ, M T, quos omnes contingat idem circulus parallelus circulo A Δ E major: dico quod arcus ΠΘ minor est arcu Σ Θ; quodque arcus T Ξ minor est quam X P.



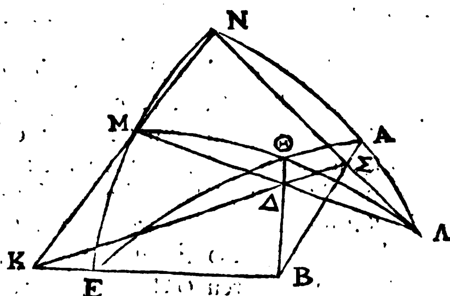
Quoniam enim in triangulo Θ B X latus X Θ majus est latere Θ B, at non majus quadrante circuli, & in arcu B Θ sumuntur duo arcus æquales Θ K, Λ M, à quibus ducuntur arcus K P, Λ Ξ, M T, continentes cum basi angulos æquales angulo apud X iisdem relativo; erit arcus X P (*per* 9m II. *hujus*), major arcu Ξ T; itemque arcus Θ X, M T simul sumpti (per demonstrata in 7ma II. hujus) majores erunt arcubus intermediis K P, Λ Ξ: quare duo arcus Θ X, X Π simul sumpti sunt majores duobus Σ X. X O simul sumptis; unde constabit arcum Θ Σ majorem esse arcu O Π. Et ex præcedentibus manifestum est quomodo consequatur conversa hujus.

MENE-

MENELAI ALEXANDRINI SPHÆRICORUM Lib. III.

PROP. I. THEOR.

Sint in ſuperficie Sphæræ duo arcus circulorum magnorum, N M E, N A Λ *inter quos ducantur alii duo arcus* E Θ A, Λ Θ M *occurrentes invicem in puncto* Θ: *dico ſinum arcus* A N *eſſe ad ſinum arcus* A Λ *in ratione compoſita ex ea quam habet ſinus arcus* N E *ad ſinum arcus* E M, *& ex ea quam habet ſinus arcus* M Θ *ad ſinum arcus* Θ A.

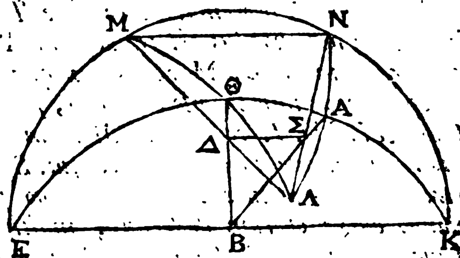


Ponatur punctum B centrum eſſe Sphæræ, & jungantur rectæ Λ N, Λ M, M N, E B, & Θ B occurrens ſubtenſæ M Λ in Δ, & A B occurrens ipſi N Λ in Σ, & ducta Δ Σ producatur uſque dum conveniat cum recta M N producta in K; & erit punctum K in plano

utriuſque

utriusque circuli Α Θ Ε, Ν Μ Ε. Sed puncta Ε, Β sunt etiam in iisdem planis; quare Κ Ε Β erit linea recta. Cum autem punctum Σ est in intersectione rectarum Α Β, Ν Λ, & punctum Δ in ipsarum Θ Β, Μ Λ; ac punctum Κ est in productâ Σ Δ; erunt tria puncta Σ, Δ, Κ in plano trianguli Ν Λ Μ: erit igitur Ν Σ ad Σ Λ in ratione composita ex ratione quam habet Ν Κ ad Κ Μ & ratione quam habet Μ Δ ad Δ Λ, *per sequens Lemma* I. Sed Ν Κ est ad Κ Μ sicut normalis cadens de puncto Ν super diametrum Κ Ε Β ad normalem de puncto Μ super eandem, *per Lemma* II. Est autem normalis de puncto Ν sinus arcus Ε Ν, & normalis de puncto Μ est sinus arcus Μ Ε; adeoque Ν Κ est ad Κ Μ ut sinus arcus Ν Ε ad sinum arcus Μ Ε. Eodem modo patebit Ν Σ esse ad Σ Λ ut sinus arcus Ν Α ad sinum arcus Α Λ; & Μ Δ esse ad Δ Λ ut sinus arcus Μ Θ ad sinum arcus Θ Λ: quapropter sinus arcus Α Ν est ad sinum arcus Α Λ in ratione composita ex ratione sinus arcus Ν Ε ad sinum arcus Μ Ε, & ex ea quam habet sinus arcus Μ Θ ad sinum arcus Θ Λ. Q. E. D.

Pone jam rectam Δ Σ parallelam esse ipsi Μ Ν; & compleantur semicirculi Ε Μ Ν, Ε Θ Α, occurrentes invicem ad Κ. Itaque quoniam in duobus planis Ε Ν Κ, Ε Θ Κ duæ rectæ Σ Δ, Μ Ν parallelæ sunt, erit quoque communis sectio horum planorum, nempe recta Ε Β Κ, etiam ipsis Σ Δ, Μ Ν parallela, *ut ex 9na XI. Eucl. constabit.* Cum autem normalis de puncto Ν



ad diametrum Κ Ε Β demissa sinus est arcus Ε Ν, cui ob parallelas æqualis est normalis de Μ ad eandem diametrum demissa; erit sinus arcus Ν Ε æqualis sinui ipsius Ε Μ. Ob parallelas vero Μ Ν, Δ Σ, erit Ν Σ ad Σ Λ, sive sinus arcus Ν Α ad sinum arcus Α Λ, sicut Μ Δ ad Δ Λ, hoc est, ut sinus arcus Μ Θ ad sinum ipsius Θ Λ: componitur igitur ratio sinus arcus Ν Α ad sinum arcus Α Λ, ex ratione sinus Μ Θ ad sinum ipsius Θ Λ & ratione sinus arcus Ν Ε ad sinum arcus Ε Μ; quæ quidem ratio, hoc in casu, ubi arcus Ε Μ, Ν Ε simul sumpti æquantur semicirculo, fit ratio æqualitatis.

Pari argumento demonstrabitur quicquid peti possit de rationibus sinuum horum arcuum, ope rectarum in dato plano inter se convenientium. At ex ipso diagrammate, quo in præsentiarum usi sumus, probari potest sinum arcus Α Λ esse ad sinum arcus Α Ν in ratione composita ex ratione sinus arcus Λ Θ ad sinum arcus Θ Μ, & ex ratione quam habet sinus arcus Μ Ξ ad sinum arcus Ξ Ν. Superius enim demonstratum est sinum arcus Α Ν esse ad sinum arcus Α Λ in ratione composita ex ea quam habet sinus arcus Μ Θ ad sinum arcus Θ Λ & ex ea quam habet sinus arcus Ν Ξ ad sinum arcus Ξ Μ. Invertendo igitur, ratio sinus arcus Α Λ ad sinum arcus Α Ν composita erit ex ratione sinus arcus Θ Λ ad sinum arcus Μ Θ, & ex ratione sinus arcus Μ Ξ ad sinum arcus Ξ Ν. Q. E. D.

SCHOLION.

Vocem נכחות, *qua significat* Hebræus *Interpres subtensam dupli arcus, sive* τὴν ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς περιφερείας *apud* Ptolemæum, *ubique Sinum reddimus, nostri ævi Mathematicis morem gerentes, & exemplo usi Traductoris* Arabis *semper vocem* جيب, *hoc est* Sinum, *adhibentis. Rationes enim eædem sunt sinuum quæ subtensarum duplorum arcuum inter se.*

Porro huic Theoremati tota fere Trigonometria Veterum innititur; nec alio usus est fundamento Ptolemæus *in Syntaxi: quod quidem illum à* Menelao, *vix quadraginta annos seniore, accepisse haud improbabile videbitur, facta collatione hujus cum Cap. XII. Lib. I. Syntaxeos Mathematicæ. Idem* Arabibus *maxime quoque in pretio fuit, qui, Sphæricorum Triangulorum dimensurationes ex hoc principio petentes, eidem exornando enixe operam dederunt, multisque scriptis Regulam hanc, quam* القطاع, *hoc est* Intersectionis, *dixerunt, elucidare conati sunt. Unde* Europæi *Mathematici ante aliquot secula, cum re nomen etiam à* Mauris *mutuati sunt, ac de Figura* Catha *scripta reliquerunt; inter quos eminet* Simon de Bredon Anglus, *circa annum* 1350 Mertonensis Socius, *cujus de hac re opus in* Bibliotheca Bodleiana *non uno Volumine asservatur.*

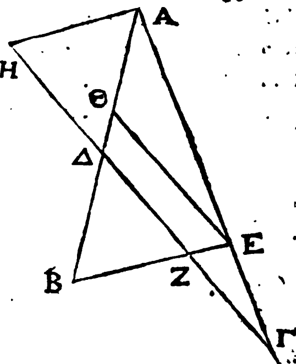
Lemmata autem in Codice Hebræo *absque demonstratione assumpta, in* Arabico *vero ad modum* Ptolemæi *demonstrata, sic se habent.*

Lemma

Lemma I.

Si ad duas rectas A B, A Γ *concurrentes in* A *ducantur duæ aliæ* Γ Δ, B E *sese interſecantes in puncto* Z: *dico rectam* A E *eſſe ad* E Γ *in ratione compoſita ex ratione* Δ Z *ad* Z Γ *& ratione* B A *ad* B Δ.

Per A *enim ipſi* B E *parallela ducatur* A H, *occurrens ipſi* Δ Γ *productæ in* H. *Jam quoniam* A H *parallela eſt ipſi* E Z, *erit ut* A E *ad* E Γ *ita* H Z *ad* Z Γ. *Sumptâ autem mediâ rectâ* Z Δ, *ratio* H Z *ad* Z Γ *componetur ex ratione quam habet* H Z *ad* Z Δ, *& ex ea quam habet* Z Δ *ad* Z Γ. *Sed ob parallelas* A H, B Z, *erit &* Z H *ad* Z Δ *ſicut* B A *ad* B Δ: *ratio igitur* H Z *ad* Z Γ, *hoc eſt* A E *ad* E Γ, *componitur ex ratione quam habet* B A *ad* B Δ *& ex ea quam habet* Δ Z *ad* Z Γ.



Iiſdem poſitis; dico quoque Γ A *eſſe ad* A E *in ratione compoſita ex ratione quam habet* Γ Δ *ad* Δ Z *& ex ea quam habet* Z B *ad* B E.

Ipſi Γ Δ *parallela ducatur* E Θ, *& ob eaſdem parallelas, erit, ut* Γ A *ad* A E *ita* Γ Δ *ad* E Θ; *ſumatur* Δ Z *media, & ratio* Γ Δ *ad* E Θ *componetur ex ea quam habet* Γ Δ *ad* Δ Z *& ex ea quam habet* Δ Z *ad* E Θ. *Ob parallelas vero* Δ Z, Θ E, *erit* Δ Z *ad* E Θ *ſicut* Z B *ad* B E: *ratio igitur* Γ Δ *ad* E Θ, *hoc eſt* Γ A *ad* A E, *compoſita eſt ex ratione* Γ Δ *ad* Δ Z *& ratione* Z B *ad* B E. Q. E. D.

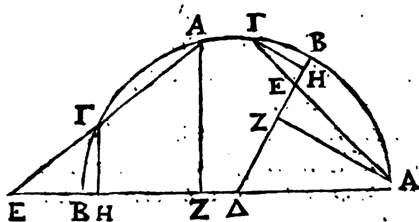
Lemma II.

Si in Circulo recta aliqua è centro educta arcum quemlibet ejuſque ſubtenſam diviſerit: erunt ſegmenta ſubtenſæ Sinubus ſegmentorum arcus proportionalia.

Sit enim circulus A B Γ A, *in quo ſubtendat arcum aliquem recta* A Γ, *& de centro* Δ *ducatur utcunque recta* Δ B *occurrens ſubtenſæ in* E, *arcui vero in* B; *& demittantur normales*

 ad

ad ΔΒ *rectæ* ΑΖ, ΓΗ: *dico* ΑΖ *esse ad* ΓΗ, *hoc est sinus arcus* ΑΒ *ad sinum arcus* ΓΒ, *sicut* ΑΕ *ad* ΕΓ.



Quoniam enim rectæ ΑΖ, ΓΗ *normales sunt ad eandem* ΔΒ, *similia erunt triangula* ΑΕΖ, ΓΕΗ; *atque adeo ut* ΑΕ *ad* ΕΓ *ita* ΑΖ *ad* ΓΗ; *& ita sinus arcus* ΑΒ *ad Sinum arcus* ΓΒ. Q. E. D.

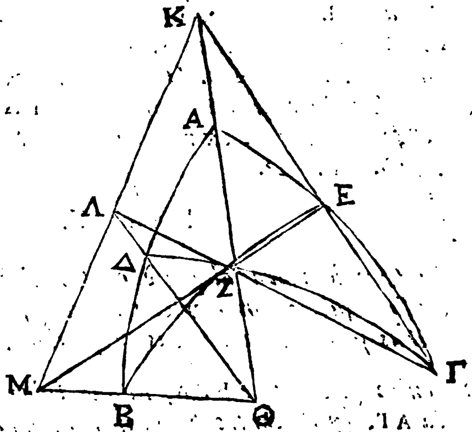
Ac manifestum est eodem modo rem se habere, si recta è centro circuli occurrat subtensæ extra circulum productæ.

His subjungere liceat aliud Theorema, à Ptolemæo *in loco citato usurpatum, & à* Theone Alexandrino *in Commentariis demonstratum: nimirum sequens*

Theorema.

Si ad duos arcus circulorum magnorum ΑΒ, ΑΓ *ducantur duo alii arcus* ΓΔ, ΒΕ *sese intersecantes in puncto* Ζ: *dico sinum arcus* ΑΓ *esse ad sinum arcus* ΑΕ *in ratione composita ex ratione sinus arcus* ΓΔ *ad sinum arcus* ΔΖ, *& ex ratione sinus arcus* ΒΖ *ad sinum arcus* ΒΕ.

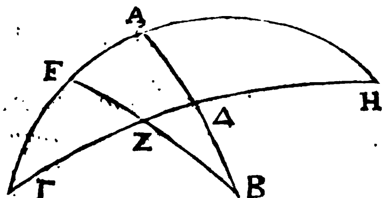
Sit enim Θ *centrum Sphæræ, & jungantur rectæ* ΘΑ, ΓΒ *& producantur ad occursum in* Κ; *itemque rectæ* ΘΒ, ΖΕ *productæ occurrant ad* Μ, *pariterque* ΘΔ, ΓΖ *productæ conveniunt ad punctum* Λ. *Quoniam itaque tria puncta* Κ, Λ, Μ, *sunt in plano trianguli* ΓΖΕ, *quippe in productis ejus lateribus; eademq; sunt etiam in plano circuli* ΑΔΒ, *utpote in rectis è centro ejus ductis; manifestum est ea incidere in communem utriusque plani sectionem: ac proinde*



ΚΛΜ,

ΚΛΜ *erit linea recta. Ductâ igitur rectâ* ΚΛΜ, *ad duas rectas* ΓΚ, ΚΜ *ducuntur aliæ duæ* ΛΓ, ΜΕ *occurrentes in puncto* Ζ, *adeoque (per Lemmatis* I. *part. poster.) ratio* ΓΚ *ad* ΚΕ *componetur ex ratione* ΓΛ *ad* ΛΖ *& ratione* ΖΜ *ad* ΜΕ. *Sed (per Lemma* II.) ΓΚ *est ad* ΚΕ *ut Sinus arcus* ΑΓ *ad Sinum arcus* ΑΕ; *&* ΓΛ *est ad* ΛΖ *ut Sinus arcus* ΔΓ *ad Sinum arcus* ΔΖ; *itemque* ΖΜ *est ad* ΜΕ *ut Sinus arcus* ΒΖ *ad sinum arcus* ΒΕ: *Composita est igitur ratio sinus arcus* ΑΓ *ad sinum arcus* ΑΕ *ex ratione sinus arcus* ΔΓ *ad sinum arcus* ΔΖ *& ratione sinus arcus* ΒΖ *ad sinum arcus* ΒΕ. Q. E. D.

Hoc autem Theorema omisit Menelaus, *idemque sine demonstratione proposuit* Ptolemæus, *quasi Propositionis primariæ Corollarium, atque ex ea facile demonstrabile. Arcubus enim* ΓΑ, ΓΔ *ad occursum in* Η *productis, erunt arcus* ΓΑΗ, ΓΔΗ *semicirculi; ac proinde Sinus arcuum* ΓΑ, ΑΗ; ΓΔ, ΔΗ *erunt eædem rectæ. Ad arcus autem* ΕΗ, ΒΕ *ducuntur duo arcus* ΑΒ, ΗΖ, *concurrentes in puncto* Δ; *atque adeo, per hanc primam Propositionem, erit Sinus arcus* ΗΑ, *hoc est Sinus arcus* ΓΑ, *ad Sinum arcus* ΑΕ *in ratione composita ex ratione Sinus arcus* ΔΗ, *hoc est Sinus arcus* ΔΓ, *ad Sinum arcus* ΔΖ *& ratione Sinus arcus* ΒΖ *ad Sinum arcus* ΒΕ. Q. E. D.



Coroll. 1. *Quoniam autem sinus arcus* ΑΔ *ad sinum arcus* ΔΒ *est in ratione composita ex ea quam habet sinus arcus* ΑΓ *ad sinum* ΓΕ, *& ex ea quam habet sinus arcus* ΕΖ *ad sinum* ΖΒ; *hoc est, ut rectangulum sub sinubus* ΑΓ×ΕΖ *ad rectangulum sub sinubus* ΓΕ×ΒΖ; *erit solidum sub extremis æquale solido sub mediis. Proinde Solidum sub sinubus* ΑΔ×ΓΕ×ΖΒ *æquale erit solido sub sinubus* ΔΒ×ΑΓ×ΕΖ. *Hinc patet hos terminos in diversimodas variari posse Analogias. Ex. gr. sinus arcus* ΓΕ *ad sinum arcus* ΕΖ *erit ut rectangulum sub sinubus* ΔΒ×ΑΓ *ad rectangulum sub sinubus* ΑΔ×ΖΒ; *hoc est, in ratione composita ex ea quam habet sinus* ΔΒ *ad sinum* ΑΔ, *& ex ratione sinus* ΑΓ *ad sinum* ΖΒ: *vel si mavis, ex ratione sinus* ΔΒ *ad sinum* ΖΒ *& ratione sinus* ΑΓ *ad* ΑΔ. *& sic de cæteris. Pari argumento, ex Theoremate nuper demonstrato,*

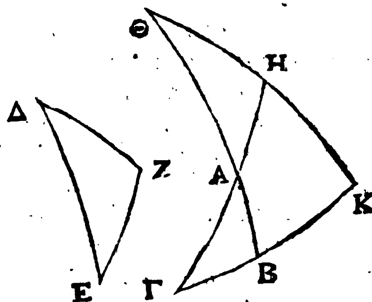
monstrato, constabit solidum sub sinubus Γ A x Δ Z x B E *æquale esse solido sub sinubus* A E x Δ Γ x B Z; *ac proinde sinum* B Z *esse ad sinum* Z Δ *in ratione composita ex ea quam habet sinus* B E *ad sinum* Δ Γ *& ex ea quam habet sinus* Γ A *ad sinum* A E. *&c.*

Coroll. 2. *Quod si* Γ *polus fuerit arcus* A B, *&* B *polus arcus* A Γ, *erunt anguli* A, E, Δ *recti; & arcus omnes* A B, A Γ, B E, Γ Δ *quadrantes; atque* Γ E Z, B Δ Z *erunt triangula Sphærica rectangula; quorum anguli* E Γ Z, Z B Δ *mensurantur arcubus* A E, A Δ *respective. Ex Corollario itaque præcedente nullo fere negotio erui possunt Canones pro resolvendis Casibus Trigonometriæ Sphæricæ pene omnibus, si demissis perpendicularibus triangula obliquangula ad casus rectangulorum reducantur.*

PROP. II. THEOR.

Si duorum triangulorum Sphæricorum duo anguli fuerint æquales, duo vero alii anguli vel æquales inter se, vel simul sumpti duobus rectis æquales: dico quod Sinus laterum, quæ duobus angulis æqualibus subtenduntur, sunt ad sinus laterum quæ duobus aliis angulis, vel æqualibus vel duobus rectis æqualibus, subtenduntur respective, in eadem ratione; & è contra.

Sint duo triangula Sphærica A B Γ, Δ E Z, sitque angulus A unius æqualis angulo Δ alterius; duo vero anguli Γ & Z vel sint æquales inter se, vel simul duobus rectis æquales: dico sinum arcus A B esse ad sinum arcus B Γ sicut sinus arcus Δ E ad sinum arcus E Z.



Producatur arcus A Γ ad H, & B A ad Θ, & fiat arcus A H æqualis arcui Δ Z, & angulus A H Θ angulo E Z Δ; & compleatur figura, productis arcubus Γ B, Θ H ad occursum in K: erit igitur arcus A Θ æqualis arcui Δ E, uti Θ H arcui E Z. Quoniam vero anguli B Γ A, A H Θ, vel sunt æquales, vel simul sumpti duobus rectis æquales, erunt arcus Γ K, K H vel simul semicircu-

lo æquales, vel æquales inter se; ac proinde Sinus arcus ΓΚ Sinui arcus ΚΗ æqualis. Sed, per Figuram Propositionis præcedentis, ratio sinus arcus ΓΚ ad sinum arcus ΒΓ componitur ex ratione sinus arcus ΚΗ ad sinum arcus ΗΘ & ratione sinus arcus ΘΑ ad sinum arcus ΑΒ: deletis autem æqualibus sinubus arcuum ΓΚ, ΚΗ, erit sinus arcus ΗΘ ad sinum arcus ΒΓ sicut sinus arcus ΑΘ ad sinum arcus ΑΒ, ϗ ἐναλλάξ. Verum arcus ΗΘ æqualis est arcui ΕΖ, uti ΑΘ arcui ΔΕ; erit igitur ut sinus arcus ΑΒ ad sinum arcus ΒΓ ita sinus arcus ΔΕ ad sinum arcus ΕΖ. Q. E. D.

Porro si ponamus angulos Α, Δ esse æquales, ac sit ut sinus arcus ΑΒ ad sinum arcus ΒΓ ita sinus arcus ΔΕ ad sinum arcus ΕΖ: dico angulos Γ, Ζ vel æquales esse, vel simul sumptos duobus rectis æquales.

Fiant ea quæ prius facta sunt; ac sit ut sinus arcus ΓΒ ad sinum arcus ΑΒ, ita sinus arcus ΗΘ ad sinum arcus ΑΘ; ϗ ἐναλλάξ: & collatis rationibus Figuræ Prop. I. congruis, consequetur, è converso superioris argumenti, sinum arcus ΚΗ æqualem esse sinui arcus ΚΓ; ac proinde angulum ΘΗΑ æqualem esse angulo ΑΓΒ, hoc est, angulum Ζ angulo Γ, vel simul sumptos duobus rectis esse æquales. Q. E. D.

Coroll. *In omni igitur Triangulo Sphærico sinus laterum sunt ut sinus angulorum ipsis oppositorum.*

PROP. III. THEOR.

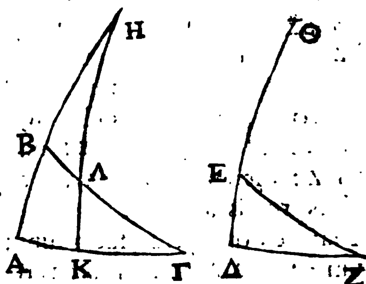
Si duo triangula Sphærica duos habeant angulos ad utramque basin rectos, duos vero alios angulos ad bases æquales quidem sed non rectos: erunt sinus duorum laterum, angulum rectum in triangulorum altero continentium, inter se in ratione composita ex ratione quam habent sinus laterum in altero triangulo angulum rectum continentium, & eodem modo sumptorum, & ex ratione quam habet sinus arcus inter Verticem trianguli prioris & polum basis ejus intercepti, ad sinum arcus inter Verticem alterius trianguli & basis ejus polum intercepti.

Sint duo triangula Sphærica ΑΒΓ, ΔΕΖ, quorum duo anguli

Α, Δ

Α, Δ sint recti, duo vero alii anguli ad Γ, Ζ æquales sint sed non recti, & sint puncta Η, Θ poli utriusque basis ΓΑ, ΖΔ: dico sinum arcus ΑΒ esse ad sinum arcus ΑΓ in ratione composita ex ratione sinus arcus ΕΔ ad sinum arcus ΔΖ & ratione sinus arcus ΗΒ ad sinum arcus ΕΘ.

Fiat enim arcus ΓΚ æqualis arcui ΔΖ, & per Η polum arcus ΑΓ ducatur arcus ΗΛΚ occurrens arcui ΓΒ in Λ; & erit arcus ΚΛ æqualis arcui ΔΕ, uti ΛΗ arcui ΕΘ. Quoniam vero figura ΑΗΛΓ est ad modum figuræ Prop. I. hujus, erit sinus ΑΒ ad sinum ΒΗ in ratione composita ex ratione sinus arcus ΑΓ ad sinum arcus ΓΚ, & ratione sinus arcus ΚΛ ad sinum arcus ΛΗ: unde transpositis terminis, ratio sinus arcus ΑΒ ad sinum arcus ΑΓ composita erit ex ratione sinus arcus ΒΗ ad sinum arcus ΛΗ, & ratione sinus arcus ΚΛ ad sinum arcus ΓΚ. Sed arcus ΓΚ æqualis est arcui ΖΔ, & arcus ΚΛ arcui ΔΕ, sicut & arcus ΛΗ arcui ΘΕ: quapropter ratio sinus arcus ΑΒ ad sinum arcus ΑΓ componitur ex ratione sinus arcus ΔΕ ad sinum arcus ΖΔ & ex ratione sinus arcus ΒΗ ad sinum arcus ΘΕ. Q. E. D.



Coroll. *Hinc constat Tangentes perpendicularium* ΑΒ, ΔΕ *sinubus Basium* ΑΓ, ΔΖ *proportionales esse.*

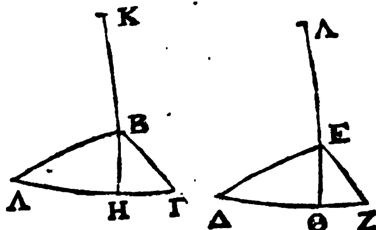
PROP. IV. THEOR.

Si duo triangula Sphærica angulos habeant ad bases æquales, quemque relativo suo, nec fuerit aliquis eorum rectus; & ab angulis verticalibus in utroque demittantur arcus ad bases normales: erunt sinus segmentorum basium inter se proportionales.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, sitque angulus Α unius æqualis angulo Δ alterius, atque etiam anguli ad puncta Γ, Ζ æquales, neque sit ullus eorum rectus: & ducantur à punctis verticum Β, Ε ad bases ΑΓ, ΔΖ arcus perpendiculares ΒΗ, ΕΘ: dico

dico ſinum arcus A H eſſe ad ſinum arcus H Γ ſicut ſinus arcus Δ Θ ad ſinum arcus Θ Z.

Ponamus enim polos duorum arcuum A Γ, Z Δ eſſe ad puncta K, Λ: itaque quoniam anguli ad puncta H, Θ ſunt recti, atque anguli ad puncta A, Δ ſunt æquales, ac puncta K, Λ poli ſunt arcuum A Γ, Δ Z: erit (*per præcedens*) ſinus arcus A H ad ſinum arcus Δ Θ in ratione compoſita ex ea quam habet ſinus arcus B H ad ſinum arcus E Θ, & ratione ſinus arcus E Λ ad ſinum arcus B K. Rurſus, quoniam anguli apud H, Θ ſunt recti, & anguli apud Γ, Z ſunt æquales & non recti; erit (*per eandem*) ſinus arcus Γ H ad ſinum arcus Z Θ in ratione compoſita ex iiſdem rationibus, nempe ex ratione ſinus arcus B H ad ſinum arcus E Θ, & ex ea quam habet ſinus arcus E Λ ad ſinum arcus B K. Eſt igitur ſinus arcus A H ad ſinum arcus Δ Θ ſicut ſinus arcus Γ H ad ſinum arcus Z Θ; & permutando erunt etiam proportionales. Q. E. D.



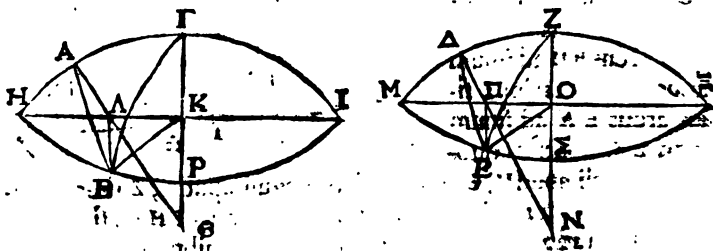
PROP. V. THEOR.

Si duo triangula Sphærica habeant duos angulos ad utriuſque baſim æquales acutos, alios vero duos rectos; reliquis autem angulis ſubtendantur latera quadrante circuli minora: erit ſinus ſummæ duorum arcuum angulum acutum comprehendentium in altero triangulorum, ad ſinum differentiæ eorundem arcuum, ſicut ſinus ſummæ arcuum in altero angulum acutum continentium, ad ſinum differentiæ eorundem.

Sint duo triangula A B Γ, Δ E Z, quorum duo anguli ad puncta A, Δ ſint recti, duo vero alii ad Γ, Z æquales acuti; ac ſit utrumque latus Γ A, Z Δ minus quadrante circuli: dico quod ſinus arcuum B Γ, Γ A ſimul ſumptorum eſt ad ſinum differentiæ ipſorum B Γ, Γ A, ſicut ſinus ſummæ arcuum E Z, Z Δ, ad ſinum differentiæ eorundem arcuum.

Centro Γ, intervallo Γ B deſcribatur ſemicirculus H B I, ut

fiat A I summa arcuum A Γ, Γ B; & A H differentia eorundem. Sit Θ centrum Sphæræ, & ducantur Γ Θ, Θ A, H I communes sectiones planorum Γ B Θ, A B Θ, H B I cum plano circuli I Γ A H. Cum autem Γ polus est circuli H B I, erit punctum K centrum ejus; ac juncta recta B K æqualis erit ipsi H K, & utraque B K, K H erit ad angulos rectos ipsi Γ Θ; atque adeo angulus rectilineus H K B, quo inclinantur plana A Γ Θ, B Γ Θ inter se, æqualis erit angulo Sphærico A Γ B, per ostensa in primâ I^{mi} hujus. Quoniam vero planum utriusque circuli A B Θ, H B I ad angu-



los rectos insistit plano circuli Γ A H; erit recta B Λ, communis nempe dictorum planorum sectio, etiam normaliter erecta super utramque rectam H Λ K, A Λ Θ (*per* 19^{am} XI. *Eucl.*) ac proinde angulus B Λ K rectus est. Radio itaque existente B K sive H K, B Λ sinus est arcus H B sive anguli H K B, hoc est anguli Sphærici A Γ B; ejusdemque sinus versus est H Λ, sinus versus vero complementi ejus ad semicirculum est recta Λ I. Sed (*per Lemma* 2^m *ad primam* III. *hujus*) Λ I est ad H Λ ut sinus arcus A I ad sinum arcus A H; hoc est, ut sinus versus anguli I Γ B ad sinum versum anguli A Γ B, ita sinus summæ arcuum A Γ, Γ B ad sinum differentiæ eorundem. Completâ autem alterâ Figurâ, ut Δ Ξ sit summa arcuum Δ Z, Z Ξ, & Δ M eorundem differentia, eodem argumento probabitur angulum B Π O rectum esse, angulumque Π O B æqualem angulo Sphærico B Z Δ, atque adeo M Π sinum esse versum anguli E Z Δ, Π Ξ vero sinum versum anguli E Z Ξ, radio existente M O vel O E. Anguli autem E Z Δ, B Z Ξ sunt æquales angulis A Γ B, I Γ B, ac propterea eorum sinus versi sunt proportionales; hoc est, Π Ξ erit ad M Π sicut I Λ ad Λ H. Sed ut Π Ξ ad M Π ita sinus arcus Δ Ξ ad sinum arcus Δ M; & ostensum est I Λ esse ad Λ H sicut sinus arcus A I ad sinum arcus A H: sinus igitur summæ arcuum B Γ, Γ A est ad sinum differentiæ eorundem, sicut sinus summæ arcuum E Z, Z Δ, sive

arcus

arcûs ΔΞ, ad sinum differentiæ ipsorum E Z, Z Δ, sive arcûs Δ M. Q. E. D.

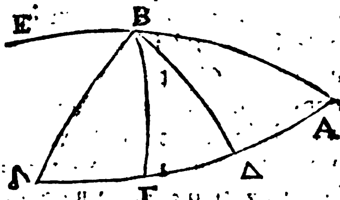
Coroll. *Hinc manifestum est sinus summarum horum arcuum esse ad sinus differentiarum eorundem, in duplicata ratione radii ad Tangentem dimidii anguli sub arcubus illis comprehensi.*

PROP. VI. THEOR.

Si dividatur angulus aliquis trianguli Sphærici bifariam, erunt sinus duorum laterum ad sinus duorum segmentorum basis in eadem ratione: & conversim & permutatim.

Sit triangulum Sphæricum A B Γ, & secet arcus B Δ angulum A B Γ bifariam; dico sinum arcus A B esse ad sinum arcus A Δ sicut sinus arcus B Γ ad sinum arcus Δ Γ.

In triangulis enim Sphæricis A B Δ, Γ B Δ, duo anguli A B Δ, Γ B Δ sunt æquales, duo vero anguli ad punctum Δ simul sumpti sunt æquales duobus rectis; erit igitur (*per* 2^m III. *hujus*) sinus arcus B A ad sinum arcus A Δ sicut sinus arcus B Γ ad sinum arcus Γ Δ, & ἐναλλὰξ erunt etiam proportionales.



E converso vero, si sinus arcus A B fuerit ad sinum arcus B Γ, sicut sinus arcus A Δ ad sinum arcus Δ Γ: dico arcum B Δ dividere angulum A B Γ bifariam.

Quoniam enim duo anguli apud Δ sunt æquales duobus rectis, & sinus arcus A B est ad sinum arcus A Δ sicut sinus arcus B Γ ad sinum arcus Γ Δ: erunt, (*è converso Prop.* 2^dæ III. *hujus*) anguli A B Δ, Δ B Γ vel æquales vel simul sumpti duobus rectis æquales; sed non sunt duobus rectis æquales, adeoque angulus A B Δ æqualis erit angulo Δ B Γ. Q. E. D.

Rursus ponatur angulus Γ B E, qui deinceps est angulo A B Γ, bifariam dividi arcu B δ; dico sinum arcus A B esse ad sinum arcus B Γ, sicut sinus arcus A δ ad sinum arcus δ Γ: atque etiam ἐναλλὰξ.

Quoniam enim duo triangula A B δ, Γ B δ habeant angulum ad δ utrique communem, duos vero angulos A B δ, Γ B δ simul

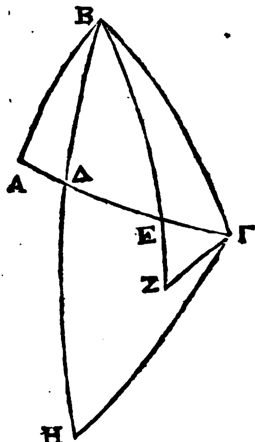
ſumptos duobus rectis æquales, erit (*per* 2ᵐ III *hujus*) ſinus arcus Α Β ad ſinum arcus Α Δ ſicut ſinus arcus Β Γ ad ſinum arcus Γ Δ, & permutando. Converſa autem hujus manifeſta eſt.

PROP. VII. THEOR.

Si de puncto verticali trianguli Sphærici ducantur ad baſim duo arcus, continentes cum duobus lateribus trianguli angulos æquales: erunt rectangula ſub ſinubus ſegmentorum baſis contenta inter ſe ſicut quadrata ſinuum laterum trianguli inter ſe.

Sit triangulum Sphæricum Α Β Γ, & à vertice Β prodeant ad baſim Α Γ arcus Β Δ, Β Ε, ita ut anguli Α Β Δ, Γ Β Ε ſint æquales: dico fore quadratum è ſinu arcus Α Β ad quadratum è ſinu arcus Β Γ ſicut rectangulum ſub ſinubus arcuum Ε Α, Α Δ ad rectangulum ſub ſinubus arcuum Δ Γ, Γ Ε.

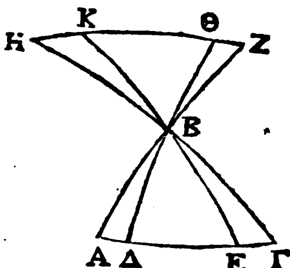
De puncto Γ ad arcus Β Δ, Β Ε productos ducantur arcus Γ Η, Γ Ζ, ita ut angulus Γ Ζ Β ſit æqualis angulo Α Β Ε, utque angulus Γ Η Β ſit æqualis angulo Α Β Δ: erit igitur (*per* 2^{dam} III *hujus*) ſinus arcus Α Β ad ſinum arcus Γ Ζ ut ſinus arcus Α Ε ad ſinum arcus Ε Γ; erit etiam ſinus arcus Α Β ad ſinum arcus Γ Η ſicut ſinus arcus Α Δ ad ſinum arcus Δ Γ: quadratum igitur ex ſinu arcus Α Β eſt ad rectangulum ſub ſinubus arcuum Γ Ζ, Γ Η ſicut rectangulum ſub ſinubus arcuum Α Ε, Α Δ ad rectangulum ſub ſinubus arcuum Ε Γ, Γ Δ. Quoniam vero angulus Β Η Γ æqualis eſt angulo Γ Β Ζ, atque angulus Β Ζ Γ æqualis angulo Η Β Γ, erunt ſinus arcuum æqualibus illis angulis ſubtenſorum proportionales, hoc eſt, ſinus arcus Β Γ erit ad ſinum arcus Γ Η ut ſinus arcus Γ Ζ ad ſinum arcus Β Γ, ac proinde rectangulum ſub ſinubus arcuum Γ Η, Γ Ζ æquabitur quadrato ex ſinu arcus Β Γ. Quadratum igitur ex ſinu arcus Α Β erit ad quadratum ex ſinu arcus Β Γ, ſicut rectangulum contentum ſub ſinubus arcuum Α Ε, Α Δ ad rectangulum ſub ſinubus arcuum Δ Γ, Γ Ε. Q. E. D.



Quod

Quod si ponatur quadratum ex sinu arcus A B esse ad quadratum è sinu arcus B Γ sicut rectangulum sub sinubus arcuum A E, A Δ ad rectangulum sub sinubus arcuum Δ Γ, Γ E: dico angulum A B Δ æqualem esse angulo Γ B E.

Producantur enim arcus A B, B Γ ad Z & H, ac fiat arcus B Z æqualis arcui A B, uti B H arcui B Γ; producatur etiam arcus B Δ ad Θ, & fiat Z Θ æqualis arcui A Δ; ac ducatur de puncto B arcus B K, qui contineat cum B H angulum æqualem angulo Z B Θ. Erit igitur, per jam demonstrata, quadratum ex sinu arcus B Z sive A B, ad quadratum è sinu arcus B H, hoc est B Γ, sicut rectangulum sub sinubus arcuum K Z, Z Θ ad rectangulum sub sinubus arcuum K H, H Θ.



Sed arcus Z Θ, Θ H arcubus A Δ, Δ Γ sunt respective æquales; unde manifestum est arcum K H æqualem esse arcui Γ E: arcus autem B H æqualis est arcui B Γ, uti angulus K H B angulo B Γ E; angulus igitur K B H æqualis est angulo Γ B E. Sed angulus K B H factus est æqualis angulo Θ B Z, hoc est angulo A B Δ: quapropter angulus A B Δ æqualis est angulo Γ B E. Q. E. D.

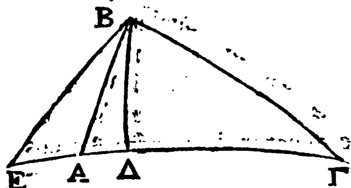
PROP. VIII. THEOR.

Si ab angulo recto trianguli Sphærici rectanguli, ducantur ad basim duo arcus continentes cum altero laterum ejus angulos æquales: erit sinus arcus compositi ex basi & arcu eidem adjuncto, ad sinum ipsius arcus adjuncti, ut sinus segmenti basis quod adjacet reliquo trianguli lateri, ad sinum alterius segmenti basis: & è contra.

Sit A B Γ triangulum Sphæricum habens angulum B rectum, & de puncto B ducantur duo arcus ad basim, ut B Δ, B E, qui contineant cum arcu A B angulos æquales: dico sinum arcus Γ E esse ad sinum arcus A E sicut sinus arcus Γ Δ ad sinum arcus Δ A.

Quoniam enim angulus A B Γ est rectus, angulus vero A B Δ æqualis angulo A B E, dividet arcus B Γ angulum qui deinceps est

est angulo E B Δ bifariam; quare (*per 6tam III hujus*) sinus arcus B E est ad sinum arcus B Δ ut sinus arcus E Γ ad sinum arcus Γ Δ; & (*per eandem*) ut sinus arcus E A ad sinum arcus A Δ: sinus igitur arcus E Γ est ad sinum arcus Γ Δ sicut sinus arcus E A ad sinum arcus A Δ; & permutando, sinus arcus Γ E est ad sinum arcus E A ut sinus arcus Γ Δ ad sinum arcus Δ A. Q. E. D.

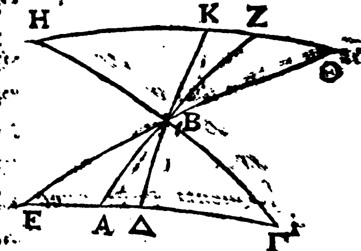


Ponatur jam sinum arcus Γ E esse ad sinum arcus E A sicut sinus arcus Γ Δ ad sinum arcus Δ A, & simul angulum E B A æqualem esse angulo A B Δ: dico angulum A B Γ rectum esse.

Permutando enim, erit sinus arcus Γ E ad sinum arcus Γ Δ sicut sinus arcus E A ad sinum arcus A Δ; hoc est, ut sinus arcus E B ad sinum arcus B Δ. Arcus igitur B Γ dividet angulum qui deinceps est angulo E B Δ bifariam: unde consequetur angulum A B Γ rectum esse. Q. E. D.

Ponatur rursus sinum arcus Γ B esse ad sinum arcus E A sicut sinus arcus Γ Δ ad sinum arcus A Δ, angulo A B Γ existente recto: dico angulum E B A æqualem esse angulo A B Δ.

Producantur enim duo arcus A B, B Γ, ut fiat arcus B Z æqualis ipsi A B, & arcus B H ipsi B Γ; & ducatur arcus H Z, ac sint duo arcus H Z, Z Θ æquales ipsis A Γ, A E respectivè: fiat etiam angulus K B Z æqualis angulo Z B Θ. Cumque angulus H B Z est rectus, (per superius ostensa) erit sinus arcus Θ H ad sinum arcus Θ Z sicut sinus arcus H K ad sinum arcus K Z. Sed sinus arcus Θ H est ad sinum arcus Θ Z sicut sinus arcus Γ E ad sinum arcus E A; quia hi arcus, uti diximus, sunt respectivè æquales. In eadem autem ratione sinus arcus Γ Δ est ad sinum arcus Δ A: quare sinus arcus H K est ad sinum arcus K Z sicut sinus arcus Γ Δ ad sinum arcus Δ A. Verum arcus Z H æqualis est arcui A Γ, quare arcus Z K æqualis est arcui A Δ; & arcus B Z æqualis est arcui A B; atque hi arcus continent angulos B Z K, B A Δ æquales: angulus igitur K B Z æqualis est angulo A B Δ, (*per 4tm I. hujus.*) Sed angulus K B Z æqua-

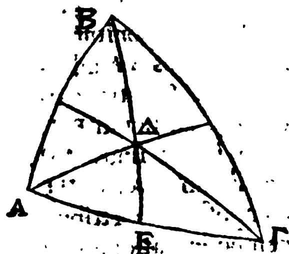


æqualis factus est angulo Z B Θ, qui æqualis est angulo A B E: angulus igitur A B Δ æqualis est angulo A B E. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

Si duo quilibet anguli trianguli Sphærici ductis arcubus dividantur bifariam, & è puncto concursus duorum arcuum ducatur arcus tertius ad angulum reliquum: dividet ille arcus angulum reliquum bifariam.

Trianguli Sphærici A B Γ dividantur duo anguli qui ad A & Γ bifariam, ductis arcubus A Δ, Δ Γ coeuntibus ad Δ; & jungantur puncta B, Δ, ducto arcu B Δ: dico arcum B Δ bisecare angulum A B Γ.



Producatur arcus B Δ ad E: & quoniam anguli qui sunt ad A & Γ dividuntur bifariam ab arcubus A Δ, Δ Γ, erit (*per* 6^m III *hujus*) sinus arcus B Δ ad sinum arcus Δ E sicut sinus arcus B Γ ad sinum arcus Γ E, & sicut sinus arcus A B ad sinum arcus A E: permutando itaque sinus arcus B Γ erit ad sinum arcus A B sicut sinus arcus Γ E ad sinum arcus A E. Erit igitur è converso ejusdem 6^{tæ}) angulus A B Γ bifariam divisus ab arcu B Δ. Q. E. D.

Coroll. *Omni igitur Triangulo Sphærico inscribi potest circulus.*

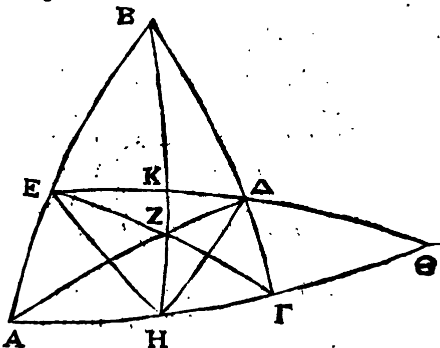
PROP. X. THEOR.

Si demittantur, de duobus quibuslibet angulis trianguli Sphærici, ad latera iisdem opposita, duo arcus perpendiculares: erit arcus ab angulo reliquo ad punctum quo conveniunt priores illi arcus, si producatur, etiam normalis super latus reliquum.

Sit A B Γ triangulum Sphæricum, & de duobus punctis angularibus A & Γ ducantur ad latera opposita B Γ, A B arcus normales A Δ, Γ E, qui conveniant in puncto Z, & ducta B Z producatur

ducatur ad occursum ipsius Α Γ in puncto Η: dico arcum Β Η perpendicularem esse super arcum Α Γ.

Transeat enim per puncta Δ, Ε arcus Ε Δ, qui producatur usque dum occurrat arcui Α Γ producto: conveniant autem ad Θ, & jungantur duo arcus Η Δ, Η Ε. Jam quoniam habetur figura Α Θ Ε Ζ, ad modum Propositionis primæ hujus, erit sinus arcus Α Θ ad sinum arcus Θ Γ in ratione composita ex ratione sinus arcus Α Δ ad sinum arcus Δ Ζ & ratione sinus arcus Ζ Ε ad sinum arcus Ε Γ. Pariterque in figura tali Α Γ Β Ζ, ratio sinus arcus Α Η ad sinum arcus Η Γ composita est ex ratione sinus arcus Α Ζ ad sinum arcus Ζ Δ & ratione sinus arcus Δ Β ad sinum arcus Β Γ. Ratio autem sinus Δ Β ad sinum Β Γ, in figura Α Β Γ Ζ, componitur ex ratione sinus Δ Α ad sinum Α Ζ & ratione sinus Ζ Ε ad sinum Ε Γ: ratio igitur sinus Α Η ad sinum arcus Η Γ composita est ex tribus,



nempe ex ratione sinus Α Ζ ad sinum Ζ Δ, & ratione sinus Δ Α ad sinum Α Ζ, & ratione sinus Ζ Ε ad sinum Ε Γ: duæ autem priores, ob utrinque inventum Α Ζ, componunt rationem sinus Δ Α ad sinum Ζ Δ: ratio igitur sinus Α Η ad sinum Η Γ componitur ex ratione sinus Δ Α ad sinum Ζ Δ & ratione sinus Ζ Ε ad sinum Ε Γ. Sed ratio sinus Α Θ ad sinum Θ Γ componitur ex iisdem rationibus; quare sinus arcus Α Θ est ad sinum arcus Θ Γ sicut sinus arcus Α Η ad sinum arcus Η Γ. Jam in triangulo Α Δ Γ angulus Α Δ Γ est rectus; quare (*per octavam* III *hujus*) angulus Θ Δ Γ æqualis erit angulo Γ Δ Η, ac proinde angulus Α Δ Η æqualis erit angulo Α Δ Ε: ac ob angulum Γ Ε Α rectum, erit quoque (*per eandem octavam*) angulus Δ Ε Γ æqualis angulo Γ Ε Η. Quoniam vero Δ Ε Η triangulum est Sphæricum, ac dividuntur anguli ejus ad Δ & Ε bifariam à ductis arcubus Δ Ζ, Ζ Ε; si ducatur arcus Η Ζ è puncto Η ad concursum eorum in Ζ, erit quoque angulus Ε Η Δ bifariam divisus, *per nonam* III. *hujus*. In triangulis autem Θ Δ Η, Θ Ε Η anguli Δ & Ε divisi sunt bifariam ab arcubus Δ Γ, Ε Γ, quare (*per*

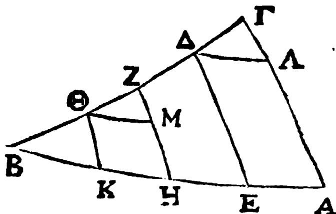
6^m III.

6ta III. *hujus*) tam sinus arcus Θ E ad sinum E H, quam sinus arcus Θ Δ ad sinum arcus Δ H, erit in eadem ratione, nempe ut sinus arcus Θ Γ ad sinum arcus Γ H: permutando itaque sinus Θ E erit ad sinum Θ Δ sicut sinus E H ad sinum H Δ, hoc est ut sinus arcus E K ad sinum arcus K Δ, quia angulus E H Δ bifariam divisus est arcu H Z K. Quocirca cum angulus E H K æqualis est angulo Δ H K, ac sinus arcus Θ E est ad sinum Θ Δ sicut sinus E K ad sinum K Δ, erit (*è conversa* 8^{væ} III *hujus*) angulus Θ H K rectus. Q. E. D.

PROP. XI. THEOR.

Si trianguli Sphærici crus majus non excesserit quadrantem circuli, & è crure illo majore sumantur duo arcus, à quorum terminis ducantur ad basim arcus continentes cum ea angulos æquales contento sub basi & crure reliquo; & si arcus sumpti fuerint æquales, erunt differentiæ inter arcus illos ductos inæquales, & differentiarum minor erit ea quæ est inter arcus cruri minori adjacentes: si vero differentiæ illæ inter arcus ductos fuerint æquales, tum arcus sumpti erunt inæquales, & major eorum erit qui propior est vertici trianguli. Quod si alter ex arcubus duobus sumptis, una cum differentia arcuum per terminos ejus ductorum, æqualis fuerit alteri arcui una cum differentia arcuum etiam per terminos ejus ductorum simul sumpta; tum duo arcus illi sumpti erunt inæquales, & eorum major erit qui propior vertici trianguli. Si vero differentia inter alterum ex arcubus sumptis & excessum quo differunt duo arcus per terminos ejus ducti, æqualis fuerit differentiæ inter alterum arcuum & excessum quo differunt arcus etiam per terminos ejusdem ducti; erit arcus ille qui vertici trianguli adjacet minor altero. Ac universim erit ratio arcus illius, qui vertici trianguli propior sumitur, ad arcum reliquum remotius sumptum, major ratione quam habet differentia inter arcus per terminos prioris ductos ad differentiam quæ est inter ductos per terminos alterius.

Sit triangulum Sphæricum Α Β Γ, cujus crus Β Γ majus sit reliquo Γ Α, sed non majus quadrante circuli; & capiantur in Β Γ arcus Γ Δ, Ζ Θ, & ducantur per terminos eorum arcus Δ Ε, Ζ Η, Θ Κ, continentes cum basi angulos æquales angulo Α: dico quod si fuerit arcus Γ Δ æqualis arcui Ζ Θ; erit Γ Λ differentia inter arcus Γ Α, Δ Ε, minor quam Ζ Μ differentia ipsorum Ζ Η, Θ Κ: Si vero differentiæ inter dictos arcus fuerint æquales; erit arcus Γ Δ major arcu Ζ Θ. Ac si fuerit arcus Γ Δ una cum excessu quo Γ Α superat Δ Ε æqualis arcui Ζ Θ una cum differentia ipsorum Ζ Η, Θ Κ, erit etiam arcus Γ Δ major quam Ζ Θ. Quod si differentia inter arcum Γ Δ & Γ Λ, quo scilicet Γ Α superat Δ Ε, æqualis fuerit differentiæ inter Ζ Θ & Ζ Μ, quo Ζ Η superat Θ Κ; tum arcus Γ Δ minor erit arcu Ζ Θ. Denique dico rationem arcus Γ Δ ad arcum Ζ Θ majorem esse ratione arcus Γ Λ ad arcum Ζ Μ.



Quoniam enim triangula Α Β Γ, Δ Β Ε &c. angulum habent ad Β communem, angulos vero ad puncta Α, Ε, Η, Κ æquales; erit sinus arcus Β Γ ad sinum arcus Β Δ sicut sinus arcus Γ Α ad sinum arcus Δ Ε, (*per* 2^m III *hujus*.) Et simili ratione, erit sinus arcus Β Δ ad sinum arcus Β Ζ ut sinus arcus Δ Ε ad sinum arcus Ζ Η; uti & sinus arcus Ζ Β ad sinum arcus Β Θ sicut sinus arcus Ζ Η ad sinum arcus Θ Κ. Arcus autem Β Γ major est arcu Γ Α, sed non major quarta circuli; quæ cum ita se habeant, evenient ea omnia quæ in hæc propositione dicta sunt, quorum demonstratio, ut & plurium his similium, è parte prima *libri Lemmatum Cyclicorum* petenda est.

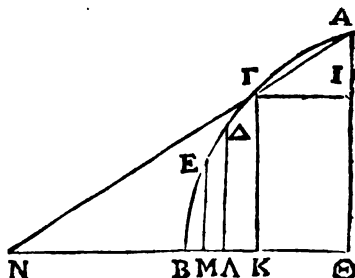
His demonstrandis non inutile videbitur Lemma sequens, cum ejusdem Corollariis.

Lemma.

Ratio quam habet arcus major ad minorem major est ratione quam habet sinus majoris ad minoris sinum

Sint Α Β, Β Γ *duo arcus, quorum sinus sint rectæ* Α Θ, Γ Κ, *normaliter ad diametrum* Β Θ *applicatæ: dico arcum* Α Β *majorem habere rationem ad arcum* Β Γ *quam habet* Α Θ *ad* Γ Κ.

Ducatur



Ducatur recta Α Γ, *quæ producatur ad occursum diametri* Β Θ *etiam productæ ad punctum* Ν, *ac erit* Α Ν *ad* Ν Γ *sicut* Α Θ *ad* Γ Κ, *ac dividendo* Γ Ν *erit ad* Α Γ *sicut* Γ Κ *ad* Α Ι *sive ad differentiam ipsarum* Α Θ, Γ Κ. *Sed* Ν Γ *major est arcu* Β Γ, *utpote Tangente major, & subtensa* Α Γ *minor est arcu* Α Γ: *ratio igitur arcus* Α Γ *ad arcum* Γ Β *major est ratione rectæ* Γ Α *ad rectam* Ν Γ. *Componendo itaque ratio arcus* Α Β *ad* Β Γ *major erit ratione* Α Ν *ad* Ν Γ, *hoc est ratione* Α Θ *ad* Κ Γ. Q. E. D.

Coroll. 1. *Permutando igitur, ratio arcus majoris ad sinum suum major est ratione arcus minoris ad sinum suum; atque adeo quo minor est arcus eo minor erit ratio ejus ad sinum eidem adjacentem.*

Coroll. 2. *Unde manifestum fiet, quod si sinus quatuor arcuum proportionales fuerint, sive si* Α Θ *sit ad* Γ Κ *sicut* Δ Λ *ad* Ε Μ, *major erit ratio arcus* Α Β *ad* Β Γ *ratione arcus* Β Δ *ad* Β Ε.

Coroll. 3. *Manente autem dicta ratione sinuum, dividendo, ratio arcus* Α Γ *ad arcum* Δ Ε *eo major erit quo majores sunt sinus isti.*

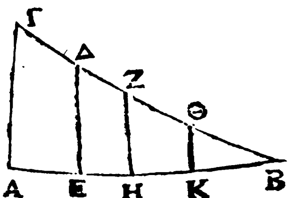
PROP. XII.

Si trianguli Sphærici alter angulorum ad basin fuerit acutus, alter vero rectus; neque fuerit latus angulo recto subtensum majus quadrante circuli; & in hoc latere capiantur duo arcus, à quorum terminis ducantur arcus ad basim normales, atque hi arcus in latere sumpti fuerint æquales: erunt arcus, qui inter normales illos intercipiuntur, inæquales; eorumque major adjacebit angulo recto. Evenient autem in hoc casu cætera omnia quæ in præcedentibus descripsimus.

Sit triangulum Sphæricum Α Β Γ, cujus angulus Β acutus, angulus vero Α rectus; nec sit latus Β Γ majus quadrante circuli; & in latere Β Γ sumantur duo arcus Γ Δ, Ζ Θ, per quorum ter-

 minos

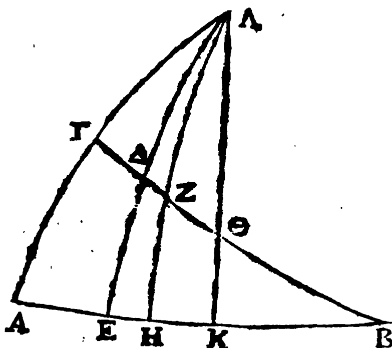
minos, ad angulos rectos super basim A B, ducantur arcus Δ E, Z H, Θ K: dico quod si arcus Γ Δ, Z Θ fuerint æquales, arcus A E major erit arcu H K; quodque si duo arcus A E, Γ Δ simul sumpti fuerint æquales duobus H K, Z Θ simul sumptis, erit arcus Γ Δ minor arcu Z Θ: quod si differentia arcuum A E, Γ Δ æqualis fuerit differentiæ inter arcus Θ Z, K H, auferendo scilicet minorem ex majore, erit arcus Γ Δ major arcu Z Θ. Universim vero ratio quam habet arcus A E ad HK major erit ratione ΓΔ ad ZΘ.



Quoniam enim arcus B Γ minor est quadrante circuli, angulus autem qui ad B acutus est, qui vero ad A, E, H, K sunt recti; erit (*per* 5^am^. III. *hujus*) ut sinus summæ arcuum A B, B Γ ad sinum differentiæ eorundem, ita sinus summæ arcuum Δ B, B E ad sinum differentiæ arcuum Δ B, B E; & ita sinus summæ arcuum Z B, B H ad sinum differentiæ eorundem, ac denique ita sinus summæ arcuum Θ B, B K ad sinum differentiæ ipsorum; quæ cum ita se habeant, evenient ea omnia quæ in præmissis dicta sunt.

Rursus si fuerit arcus B Γ quadrans circuli, adeoque A B ipsi B Γ æqualis, eadem ipsa etiam hoc in casu consequentur, juxta ea quæ demonstravimus in parte prima *Libri Lemmatum Cyclicorum.*

Sed & eadem alio modo ex hoc tertio Libro probabuntur. Producantur enim arcus A Γ, E Δ, H Z, K Θ ad polum arcus A B, qui sit ad punctum Λ; & (*per* 3^am^ III. *hujus*) ratio sinus arcus A B ad sinum arcus B E, componetur ex ratione sinus arcus Λ Γ ad sinum arcus E Δ; hoc est, ex ratione sinus arcus B Γ ad sinum arcus B Δ, & ratione sinus arcus Λ Δ ad sinum Λ Γ. Sed Λ Δ major est quam Λ Γ, & uterque minor quadrante circuli; quare ratio sinus A B ad sinum arcus B E major est



ratione

ratione sinus arcus ΒΓ ad sinum arcus ΒΔ. Pari modo patebit rationem sinus arcus ΕΒ ad sinum ΒΚ majorem esse ratione sinus arcus ΔΒ ad sinum arcus ΒΘ. Hinc constare potest rationem sinus arcus ΕΚ ad sinum arcus ΚΑ minorem esse ratione sinus arcus ΔΘ ad sinum arcus ΘΓ: Invertendo igitur ratio sinus arcus ΚΑ ad sinum arcus ΚΕ major est ratione sinus arcus ΘΓ ad sinum arcus ΘΔ. Et eodem modo probabitur sinum arcus ΕΚ majorem habere rationem ad sinum arcus ΚΗ quam habet sinus arcus ΔΘ ad sinum arcus ΘΖ. Pariter cum ratio sinus ΗΒ ad sinum arcus ΒΚ major sit ratione sinus arcus ΖΒ ad sinum ipsius ΒΘ, erit ratio sinus arcus ΚΑ ad sinum arcus ΑΗ minor ratione sinus arcus ΘΓ ad sinum arcus ΓΖ; ac propterea sinus arcus ΑΗ ad sinum arcus ΑΕ erit in minore ratione quam sinus arcus ΓΖ ad sinum arcus ΓΔ. Hæc autem cum ita se habeant, evenient ea omnia quæ in hac propositione dicta sunt, & arcus ΑΕ erit ad arcum ΗΚ in majori ratione quam arcus ΓΔ ad arcum ΖΘ. Q. E. D.

SCHOLION.

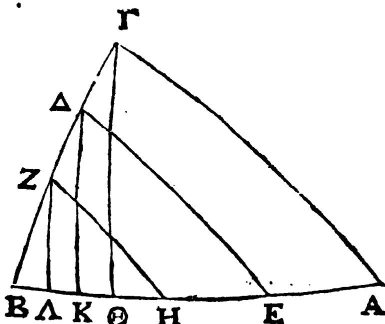
In hac, uti & in præcedente propositione, citatur Liber cui titulus ספר התמונות ההקשיות *hoc est, Liber Propositionum seu potius Lemmatum Cyclicorum, uti verba videntur reddenda. Curta sane sunt & imperfecta quæ his demonstrandis afferuntur argumenta, & ex dicto libro petita, qui qualis fuerit ne conjectura quidem assequi licebit. Ex consensu autem utriusque Codicis MS*[ti]*. in ipsius Auctoris Græca textu deperdito eadem olim reperta fuisse crediderim: qui textus an integer ad Traductores pervenerit, an potius hac in parte mancus, definire vix ausim. Sed nec te moveat si nonnulla hîc desiderentur; quoniam in Corollariis ad* xv[tam] *bujus libri tertii, eadem ipsa paulo evidentius demonstrata reperies.*

PROP. XIII.

Si trianguli non æquilateri majus latus non excedat quadrantem circuli, & capiantur in latere minore duo arcus, à quorum extremitatibus ducantur arcus ad basim, continentes cum ea angulos æquales angulo quem latus reliquum cum eadem continet; ducantur etiam ab iisdem punctis alii arcus ad basim normales; tum si duo arcus

arcus, intercepti inter illos qui æquales angulos cum basi constituunt, fuerint æquales, inæquales erunt arcus in basi inter normales intercepti; & eorum major adjacebit lateri trianguli minori. Quod si fuerint duo arcus è basi à normalibus abscissi æquales inter se, tum arcus, intercepti inter eos qui faciunt cum basi angulos æquales, erunt inæquales; & eorum major conterminus erit lateri majori; & evenient cætera accidentia, prout diximus, ad exemplum præcedentium.

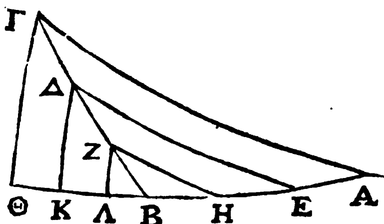
Sit triangulum Sphæricum Α Β Γ, ac sit latus Α Γ majus quam Γ Β, sed non majus quadrante circuli; ac capiantur in Β Γ arcus Γ Δ, Δ Ζ, à quorum terminis ducantur ad basim Α Β arcus continentes cum ea angulos æquales angulo ad Α iisdem relativo, sicut arcus Δ Ε, Ζ Η; uti etiam arcus Γ Θ, Δ Κ, Ζ Λ basi Α Β perpendiculares: dico quod si fuerit arcus Α Ε æqualis arcui Ε Η, erit arcus Θ Κ minor arcu Κ Λ; ac si fuerit arcus Θ Κ æqualis arcui Κ Λ major erit arcus Α Ε arcu Ε Η; evenientque cætera modo dicta. Et universim ratio quam habet arcus ΑΕ ad Ε Η major erit ratione arcus Θ Κ ad Κ Λ.



Quoniam in duobus triangulis Sphæricis Α Β Γ, Ε Β Δ, anguli apud puncta Α, Ε sunt æquales; angulus autem apud Β communis est utrique, & inter eos ducuntur arcus ad Α Β normales, ut Γ Θ, Δ Κ; erit (*per* 4am. III. *hujus*) sinus arcus Α Θ ad sinum arcus Θ Β sicut sinus arcus Ε Κ ad sinum ipsius Κ Β; pariterque erit ut sinus arcus Ε Κ ad sinum arcus Κ Β ita sinus arcus Η Λ ad sinum arcus Β Λ: ac permutando sinus Α Θ ad sinum Ε Κ erit ut sinus Θ Β ad sinum arcus Β Κ; & ut sinus Ε Κ ad sinum Η Λ ita sinus Κ Β ad sinum Β Λ: & ubicunque duxeris normalem, hi sinus erunt semper proportionales. Arcus autem Α Θ major est quam Θ Β, ob arcum Α Γ majorem arcu Γ Β. Jam si fuerit arcus Θ Κ æqualis arcui Κ Λ, erit differentia arcuum Α Θ, Ε Κ; hoc est, differentia

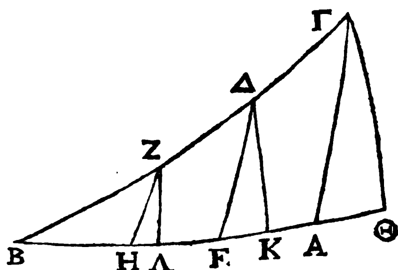
arcuum

arcuum A E, Θ K major differentia arcuum E K, H Λ sive arcuum E H, Λ K, in figura prima: in figura autem secunda, summa arcuum A E, Θ K major erit summa ipsorum E H, K Λ. In utraque itaque figura arcus A E major est quam E H.



Quod si A Θ æqualis fuerit ipsi E H; quoniam, in figura prima, arcuum A Θ, E K, sive arcuum A E, Θ K, differentia minor est differentia arcuum E K, H Λ; hoc est, arcuum E H, K Λ; & in figura secunda, summa arcuum A E, Θ K minor est summa arcuum E H, K Λ. In utraque igitur figura arcus K Θ minor erit quam K Λ. Atque universim ratio arcus A E ad E H major erit ratione quam habet arcus Θ K ad K Λ. Unde & ex præcedente constabit rationem arcus A E ad E H majorem esse ratione arcus Γ Δ ad Δ Z. Q. E. D.

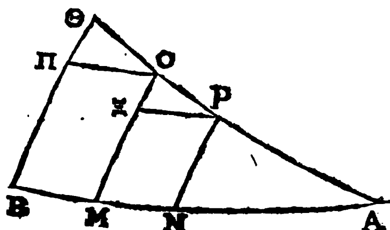
Pari modo ostendi potest quod, si angulus A trianguli A B Γ fuerit obtusus, qui vero ad B acutus, & arcus B Γ non excesserit quadrantem; ac capiantur in arcu B Γ duo arcus ut Γ Δ, Δ Z, & ducantur ad basim A B duo arcus Δ E, Z H, continentes cum ea angulos æquales angulo A iisdem relativo; ducantur etiam perpendiculares Γ Θ, Δ K, Z Λ: tum eadem quoque evenient quæ modo diximus. Et universim ratio arcus A E ad E H major erit ratione arcus Θ K ad K Λ. Unde etiam constabit rationem A E ad E H majorem esse ratione arcus Γ Δ ad Δ Z. Q. E. D.



SCHOLION.

Ut autem hæc melius intelligantur, Scholium hoc subjungere visum est. Quoniam sinus arcus A Θ *est ad sinum arcus* Θ B *sicut sinus arcus* E K *ad sinum arcus* K E, *&c. contineant arcus* A Θ, Θ B *angulum aliquem* A Θ B, *& in* A Θ *capiantur arcus,*

arcus, A O *ipsi* E K *æqualis, uti &* A P *ipsi* H Λ; *& ducantur arcus* O M, P N, *constituentes cum basi* A B *angulos* M *&* N *angulo* B *æquales*; *& fiat* Π B *ipsi* O M, *&* M Ξ *ipsi* P N *æqualis*: *erit igitur* (*per* 2^m^. III. *hujus*) *arcus* O M *æqualis arcui* K B *in præcedentibus figuris*, *&* P N *arcui* B Λ. *Proinde arcus* Θ O *æqualis erit differentiæ arcuum* A E, Θ K, *in priore figura*; *vel summæ ipsorum* A E, Θ K, *in secunda*: *& arcus* O P *æqualis erit differentiæ vel summæ arcuum* E H, K Λ. *Erit etiam arcus* Θ Π *æqualis arcui* Θ K, *&* O Ξ *ipsi* K Λ. *Jam, per undecimam præcedentem, ratio arcus* O Θ *ad* Θ Π *major est ratione* O P *ad* Ξ O; *hoc est, ratio differentiæ vel summæ arcuum* A E, Θ K *ad arcum* Θ K *major est ratione differentiæ vel summæ arcuum* E H, K Λ *ad arcum* K Λ: *componendo igitur, in casu prioris figuræ*; *vel dividendo, in casu figuræ secundæ, ratio* A E *ad* Θ K *major erit ratione* E H *ad* K Λ. *Permutando autem ratio* A E *ad* E H *major erit ratione* Θ K *ad* K Λ; *quæ quidem ratio* (*per proxime præcedentem*) *major est ratione* Γ Δ *ad* Δ Z; *ratio igitur* A E *ad* E H *multo major est ratione* Γ Δ *ad* Δ Z. Q. E. D.



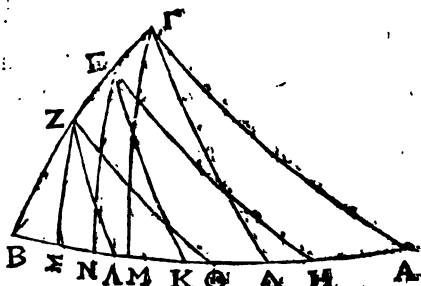
PROP. XIV. THEOR.

Si trianguli Sphærici latera fuerint inæqualia, nec eorum majus excesserit quadrantem, & à vertice ejus ad basim ducatur arcus utcunque, modo non minor sit latere trianguli minore; sumptisque in latere minore arcubus, ducantur per terminos eorum ad basim arcus continentes cum ea angulos æquales angulo quem cum ipsa continet latus trianguli majus; ducantur etiam per eosdem terminos arcus alii, continentes cum basi angulos æquales angulo, quem cum ea continent arcus prius ductus: & evenient eadem quæ in præcedentibus propositionibus dicta sunt: Et universim ratio arcuum interceptorum ab iis qui cum basi continent arcus æquales contento sub

basi

basi & latere majore, ubicunque sumantur, major erit ratione arcuum interceptorum ab aliis illis arcubus ductis: posito scilicet quod in omnibus his rationibus antecedentes sint arcus illi qui adjacent lateri majori, consequentes vero qui ab eodem remotiores sunt.

Sit ΑΒΓ triangulum Sphæricum, cujus latus ΑΓ majus sit latere ΒΓ, sed non majus quadrante circuli, & a vertice Γ ducatur ad basim ΑΒ arcus quilibet ΓΔ, qui non minor sit quam ΒΓ; & in ΒΓ capiantur duo arcus ΓΕ, ΕΖ, & ducantur per eorum extremitates ad basim arcus ΕΗ, ΖΘ, continentes cum ea angulos æquales angulo Α; ducantur etiam alii arcus ΕΚ, ΖΛ facientes cum eadem basi angulos æquales angulo ad Δ: dico rationem arcus ΑΗ ad arcum ΗΘ majorem esse ratione arcus ΔΚ ad ΚΛ.

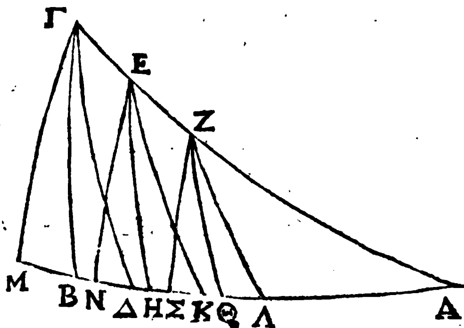


Nam si fuerit angulus ΑΒΓ rectus, erit, per quartam hujus, sinus arcus ΑΒ ad sinum arcus ΒΗ sicut sinus arcus ΔΒ ad sinum arcus ΒΚ: pariterque sinus arcus ΒΗ est ad sinum arcus ΒΘ sicut sinus arcus ΒΚ ad sinum arcus ΒΛ; unde & ex præcedente manifesta sunt ea omnia quæ dicta sunt. Quod si angulus ad Β non fuerit rectus, ducantur ad basim arcus normales ΓΜ, ΕΝ, ΖΣ: quoniam vero ΓΔ non minor est quam ΓΒ, erit ΔΜ non minor quam ΜΒ; & argumento superius usurpato, probabitur sinum arcus ΑΜ esse ad sinum arcus ΜΒ, sicut sinus arcus ΗΝ ad sinum arcus ΝΒ, & ita sinus arcus ΘΣ ad sinum ΣΒ; erit etiam sinus arcus ΔΜ ad sinum arcus ΜΒ sicut sinus arcus ΚΝ ad sinum arcus ΝΒ, & sicut sinus arcus ΛΣ ad sinum arcus ΣΒ. Sed arcus ΑΜ major est quam ΒΜ, & arcus ΔΜ non minor est quam ΒΜ, & nec arcus ΑΜ neque ΑΓ major est quadrante circuli: erit igitur ratio arcus ΑΗ sive differentia arcuum ΑΒ, ΒΗ, ad ΗΘ sive differentiam arcuum ΒΗ, ΒΘ, major ratione quam habet ΔΚ differentia arcuum ΔΒ, ΒΚ, ad arcum ΚΛ differentiam arcuum ΚΒ, ΒΛ. Pariterque etiam

conſtabit arcum Α Δ majorem habere rationem ad arcum Δ Β quam habet arcus Η Κ ad Κ Β, atque hanc rationem majorem eſſe ea quam habet Θ Λ ad Λ Β.

Eſt enim ſinus arcus Α Μ *ad ſinum arcus* Η Ν *ſicut ſinus arcus* Μ Δ *ad ſinum arcus* Κ Ν, *& ſinus arcus* Η Ν *ad ſinum* Θ Σ *ſicut ſinus* Κ Ν *ad ſinum* Λ Σ, *quia ſunt inter ſe ſicut ſinus arcus* Μ Β *ad ſinum* Β Ν, *& ut ſinus* Β Ν *ad ſinum* Β Σ; *ac proinde, argumento Scholii præcedentis, erit differentia arcuum* Α Μ, Η Ν *ad differentiam arcuum* Η Ν, Θ Σ *in majori ratione quam differentia arcuam* Δ Μ, Κ Ν *ad differentiam arcuum* Κ Ν, Λ Σ; *hoc eſt, differentia arcuum* Α Η, Μ Ν *ad differentiam arcuum* Η Θ, Ν Σ *in majori erit ratione quam differentia arcuum* Δ Κ, Μ Ν *ad differentiam arcuum* Κ Λ, Ν Σ. *Unde & ex præcedentibus conſequitur, rationem arcus* Α Η *ad arcum* Η Θ *majorem eſſe ratione arcus* Δ Κ *ad arcum* Κ Λ.

Rurſus, ſi fuerit angulus Α trianguli Α Β Γ acutus, qui vero ad Β obtuſus, ac latus Α Γ non ſit majus quadrante circuli; ac ducatur de puncto Γ ad baſin Α Β arcus Γ Δ, & capiantur in latere Α Γ arcus Γ Ε, Ε Ζ, & ducantur arcus Ε Η, Ζ Θ continentes cum baſi Α Β angulos æquales angulo ad Β; ducantur quoque alii arcus Ε Κ, Ζ Λ continentes cum baſi angulos æquales angulo Δ: dico rationem arcus Δ Κ ad Κ Λ majorem eſſe ratione arcus Β Η ad Η Θ.



Demittantur enim arcus ad baſim perpendiculares Γ Μ, Ε Ν, Ζ Σ; & (*per* 4^tam^ III. *hujus*) erit ut ſinus arcus Α Μ ad ſinum arcus Μ Β, ita ſinus arcus Α Ν ad ſinum arcus Ν Η, & ſinus arcus Α Σ ad ſinum arcus Σ Θ: pariterque erit ut ſinus arcus Α Μ ad ſinum arcus Μ Δ, ita ſinus arcus Α Ν ad ſinum arcus Ν Κ; & ita ſinus arcus Α Σ ad ſinum arcus Σ Λ: erit igitur ratio differentiæ arcuum Δ Α, Α Κ ad differentiam arcuum Κ Α, Α Λ major ratione quam habet differentia arcuum Β Α, Α Η ad differentiam arcuum Η Α, Α Θ. Q. E. D.

Unde etiam conſequitur rationem arcus Α Δ ad Δ Β majorem

eſſe

esse ratione arcus ΑΚ ad ΚΗ, atque rationem ΑΚ ad ΚΗ majorem esse ratione ΑΛ ad ΛΘ.

*Plurima autem ad perfectam demonstrationem in his desiderari quis non videt, sive ab Authore subintellecta, sive à Traductoribus brevitati studentibus prætermissa, vel forsan remotiorum seculorum injuria in libris antiquioribus obliterata? Sed & ex diversissimo fundamento, quod in Scholio ad IX*nam *secundi Libri posuimus, eadem ipsa paulo ut videtur apertius derivari possunt. Ostendimus enim ibidem,* pag. 70. *rationem arcus momentanei* ΓΕ *ad momentaneum* ΑΗ (in fig. prima) *componi ex data & manente ratione sinus anguli* Α *ad semidiametrum Sphæræ, & ex ratione sinus complementi arcus* ΑΓ *vel* ΕΗ *ad quadrantem, ad sinum anguli* ΑΓΒ *vel* ΒΕΗ. *Simulque rationem momentanei arcus* ΓΕ *ad momentaneum arcum* ΔΚ *componi ex ratione data quam habet sinus anguli* Δ *ad semidiametrum sphæræ, & ratione sinus complementi arcus* ΔΓ *vel* ΕΚ *ad sinum anguli* ΔΓΒ *vel* ΚΕΒ. *Eodemque modo componetur ratio quam habet arcus momentaneus* ΕΖ *ad arcus quam minimos* ΗΘ *ac* ΚΛ: *Æquabilius autem crescunt momenta arcuum* ΑΚ, ΚΔ, *quam momenta arcuum* ΘΗ, ΗΑ, *posito quod arcus* ΒΓ *motu æquabili augeatur; ac proinde quo minor est angulus* Α *respectu anguli* Δ, *eo major erit ratio arcus* ΑΗ *ad arcum* ΗΘ, *respectu ejus quam habet arcus* ΔΚ *ad* ΚΛ.

PROP. XV. THEOR.

Si in superficie Sphæræ duo circuli magni inclinati sint ad invicem, & capiantur in eorum uno duo puncta, per quæ ducantur ad alterum duo arcus eidem ad angulos rectos: tum sinus arcus, intercepti inter casus duorum perpendicularium, erit ad sinum arcus inter sumpta duo puncta, ut rectangulum contentum sub semidiametro Sphæræ & semidiametro circuli qui contingit unum è circulis & alteri æquidistans est, ad rectangulum sub semidiametris duorum circulorum per sumpta duo puncta transeuntium, alterique dictorum circulorum magnorum æquidistantium.

Sint

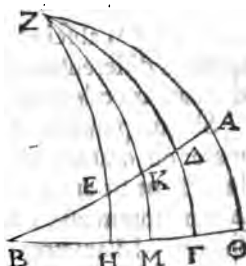
Sint duo circuli magni A B, B Γ inclinati inter se, & sumantur in A B duo puncta Δ, E, per quæ ducantur ad arcum B Γ normales Δ Γ, E H: dico quod sinus arcus Γ H est ad sinum arcus E Δ, sicut rectangulum sub semidiametro sphæræ & semidiametro circuli ipsi B Γ æquidistantis circulumque B A contingentis, ad rectangulum sub semidiametris circulorum per puncta Δ, E transeuntium circuloque B Γ æquidistantium.

Producantur arcus Γ Δ, H E ad polum circuli B Γ, qui sit Z; & ad B A normalis sit arcus A Z. Jam quoniam uterque angulus Z A E, Z H B est rectus, & angulus A E Z est angulo B E H æqualis, erit sinus arcus A Z ad sinum arcus Z E (per III. hujus) sicut sinus arcus B H ad sinum arcus B E. Est autem Figura B Γ Z Æ ad modum figuræ propositionis primæ hujus; componetur igitur ratio sinus arcus Γ H ad sinum arcus Δ E ex ratione sinus arcus Γ Z ad sinum Z Δ, & ratione sinus arcus B H ad sinum arcus B E. Verum hæc ratio eadem ostensa est ac ratio sinus arcus A Z ad sinum arcus Z E; quare sinus arcus Γ H est ad sinum arcus Δ E ut rectangulum sub sinubus arcuum Γ Z, A Z ad rectangulum sub sinubus arcuum Δ Z, Z E. Sinus autem arcus Γ Z semidiameter est sphæræ, & sinus arcus A Z semidiameter est circuli transeuntis per A & circulo B Γ æquidistantis, qui etiam contingit circulum A B in puncto A; & sinus arcuum Δ Z, Z E sunt semidiametri circulorum per puncta Δ, E transeuntium, eidemque circulo B Γ æquidistantium. Constat ergo propositum.

Hinc demonstrari potest, uti diximus, Propositio principalis libri tertii Sphæricorum *Theodosii*, diverso tamen modo. Ostendit enim ille rationem arcus Γ Θ ad arcum A Λ majorem esse ratione diametri Sphæræ ad diametrum circuli æquidistantis ipsi B Γ Θ, & circulum A B in puncto A contingentis. Hæc autem propositio est ipsius *Apollonii*, in libro cui titulus *Liber* הכללי, (forte *De Principiis universalibus.*) Nos vero in sequentibus ostendemus quomodo se res habeat universim, quodque

quæ ratio arcus Γ H ad arcum Δ E certa quadam ratione major eſt, quadam vero minor.

Jam ſi duo circuli magni A B, B Θ inclinentur ad invicem, & ducatur circulus tranſiens per polos utriuſque, ut Z A Θ, & punctum Z ſit polus circuli B Θ; ducatur etiam è puncto Z arcus circuli magni Z K M occurrens arcui A B in K, ita ut ſinus arcus Z K media proportionalis ſit inter ſinus arcuum Z A, Z Θ; hoc eſt, ut diameter circuli per K tranſeuntis circuloque B Θ æquidiſtantis, media proportionalis ſit inter diametrum Sphæræ & diametrum circuli contingentis circulum A B circuloque B Θ æquidiſtantis: dico exceſſum quo arcus B K ſuperat arcum B M datum eſſe; exceſſumque illum majorem eſſe quovis alio inter quoslibet duos arcus ad hunc modum abſciſſos.



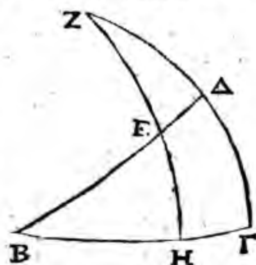
Eſt enim ſinus arcus M Z ad ſinum arcus Z K ſicut ſinus arcus Z K ad ſinum arcus A Z, ac proinde ſinus arcus M Θ eſt ad ſinum arcus A K ut ſinus arcus K B ad ſinum arcus B M. Sed arcus B Θ æqualis eſt arcui A B; quare arcus Θ M æqualis eſt arcui B K, & arcus K A arcui B M. Quoniam vero ſinus arcus M Z eſt ad ſinum arcus Z K ſicut ſinus arcus Z K ad ſinum arcus Z A, erit ſinus M Z ad ſinum Z A, ſive diameter ſphæræ ad diametrum circuli ipſi B Θ æquidiſtantis & circulum A B tangentis in puncto A, ſicut quadratum è ſinu arcus Z M ad quadratum è ſinu arcus Z K, hoc eſt, ut quadratum è ſinu arcus Θ M ad quadratum è ſinu arcus A K. Componendo igitur ac dividendo, erit ut ſumma dictarum diametrorum ad earundem differentiam ita ſumma quadratorum ex ſinubus arcuum Θ M, K A qui quadrantem conficiunt, hoc eſt, quadratum ex ſemidiametro ſphæræ, ad differentiam quadratorum ex iiſdem ſinubus. Sed dictæ diametri datæ ſunt, data eſt igitur differentia illa quadratorum; & dato eorundem aggregato, dantur quoque ipſa quadrata è ſinubus arcuum Θ M, A K: dantur ideo ipſi arcus, ac proinde eorundem differentia data eſt. Quum autem hi duo arcus ſimul ſumpti quadrantem circuli conficiunt; dico eorundem differentiam majorem eſſe quavis alia differentia arcuum ad hunc modum abſciſſorum.

Ducantur enim per polum Z arcus circulorum magnorum

Z Δ Γ,

ΖΔΓ, ΖΚΜ, ΖΕΗ, & erit ſinus arcus ΓΜ ad ſinum arcus ΚΔ ut rectangulum ſub ſemidiametro ſphæræ & ſinu arcus ΑΖ contentum, ad rectangulum ſub ſinubus arcuum ΔΖ, ΖΚ. Sed rectangulum ſub ſemidiametro ſphæræ & ſinu arcus ΑΖ æquale eſt quadrato ex ſinu arcus ΚΖ; quod quidem quadratum majus eſt rectangulo ſub ſinubus ΔΖ, ΖΚ: quare arcus ΓΜ major eſt arcu ΔΚ. Pari modo demonſtrabitur arcum ΜΗ minorem eſſe arcu ΚΕ. Quæ cum ita ſe habeant, erit exceſſus arcus ΕΚ ſupra arcum ΜΒ major exceſſu arcus ΕΒ ſupra arcum ΒΗ, ac major exceſſu arcus ΔΒ ſupra arcum ΒΓ. Unde manifeſtum eſt arcum ΖΚΜ abſcindere è duobus circulis ΑΒ, ΒΘ duos arcus, quorum differentia major ſit ea quæ eſt inter quoſlibet alios duos arcus eodem modo abſciſſos.

Sit jam punctum Ζ polus circuli ΒΗΓ, ac ſit arcus ΒΔ non major quadrante; tranſeant autem arcus ΓΔΖ, ΗΕΖ per polum Ζ, ut ſit arcus ΓΗ major arcu ΔΕ: dico rationem ΓΗ ad ΔΕ minorem eſſe ratione diametri ſphæræ ad diametrum circuli circulo ΒΓ æquidiſtantis & per punctum Δ tranſeuntis.



Quoniam enim arcus ΔΒ non eſt major quadrante, & arcus ΔΕ minor eſt quam ΓΗ; ratio autem ſinus arcus ΓΗ ad ſinum arcus ΔΕ (*per jam oſtenſa*) compoſita eſt è ratione ſinus arcus ΓΖ ad ſinum arcus ΖΔ, & ratione ſinus arcus ΗΒ ad ſinum arcus ΒΕ; & ΗΒ minor eſt quam ΒΕ: erit igitur ratio ſinus arcus ΓΗ ad ſinum arcus ΔΕ minor ratione ſinus arcus ΓΖ ad ſinum arcus ΖΔ, ſive ratione quam habet ſemidiameter ſphæræ ad ſemidiametrum circuli per Δ tranſeuntis circuloque ΒΓ æquidiſtantis. Cum autem ΓΖ quadrans eſt, & ΓΗ quadrante minor, erit quoque ratio arcus ΓΗ ad ΔΕ dicta ratione diametrorum minor.

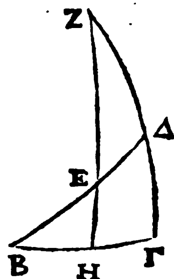
Cum vero ſinus arcus ΓΗ ad ſinum arcus ΔΕ ſit ſicut rectangulum ſub ſemidiametro ſphæræ & ſemidiametro circuli qui contingit circulum ΒΕΔ, ipſiuſque ΒΓ plano æquidiſtat, ad rectangulum ſub ſemidiametris circulorum per puncta Δ, Ε tranſeuntium, eidemque plano æquidiſtantium; ſi arcus ΓΗ major ſit quam ΔΕ: dico rationem quam habet arcus ΓΗ ad arcum ΔΕ majorem eſſe dicta ratione rectangulorum.

Quoniam

Quoniam enim arcus Γ H major est arcu Δ E, erit eorundem arcuum ratio major ratione sinus arcus Γ H ad sinum arcus Δ E. Hæc autem ratio ea est quam habet rectangulum sub semidiametro sphæræ & semidiametro circuli qui tangit circulum B Δ circuloque B Γ æquidistat, ad rectangulum sub semidiametris circulorum eidem B Γ æquidistantium perque puncta Δ, E, transeuntium: ratio igitur arcus Γ H ad arcum Δ E major est ratione prædicta.

Eodem modo constabit, quod si arcus Γ H minor fuerit quam Δ E, erunt hi arcus in ratione minore quam habent rectangula illa inter se.

Ponamus enim arcum Γ H minorem esse arcu Δ E, & erit rectangulum sub semidiametro sphæræ & semidiametro circuli contingentis circulum B Δ ipsique B Γ æquidistantis, minus rectangulo sub semidiametris circulorum per puncta Δ, E transeuntium eidemque plano æquidistantium; horum autem rectangulorum rationem habent sinus arcuum Γ H, Δ E inter se: minor itaque est ratio arcuum ipsorum ratione dictorum rectangulorum.



Sit autem arcus Γ H minor arcu Δ E, sive rectangulum sub diametro Sphæræ & diametro circuli contingentis circulum B Δ, planoque circuli B Γ æquidistantis, minus rectangulo sub diametris circulorum per puncta Δ, E transeuntium: dico rationem arcus Γ H ad arcum Δ E majorem esse ratione diametri circuli qui contingit circulum B Δ, ad diametrum circuli per punctum E transeuntis.

Quoniam enim rectangulum sub sinubus arcuum E Z, Z Δ majus est rectangulo sub semidiametro Sphæræ & semidiametro circuli contingentis B Δ ipsique B Γ æquidistantis; ducantur per Z polum circuli B Γ arcus circulorum magnorum Z K M, Z Λ N, ita ut rectangula sub sinubus arcuum Δ Z, Z Λ; E Z, Z K contenta, sint singula æqualia contento sub semidiametro Sphæræ & semidiametro circuli contingentis circulum B Δ. Cadat autem imprimis punctum Λ inter puncta Δ, E. Et ob æqualia illa rectangula, erit (*per jam ostensa*) arcus Γ N æqualis arcui Δ Λ, ut & Λ E arcui Γ M, & arcus H N arcui Δ K: quocirca arcus Γ N, N H simul sumpti æquales sunt arcubus Λ Δ, Δ K simul, hoc est arcus Γ H arcui K Λ. Pari modo arcus M Γ, Γ N simul (hoc est arcus M N) æquales

æquales sunt arcui Δ E. Sed (per superius demonstrata) ratio arcus M N ad arcum K Λ, sive arcus Δ E ad arcum Γ H, minor est ratione semidiametri Sphæræ ad sinum arcus K Z; quæ quidem ratio eadem est ac ratio sinus arcus B Z ad semidiametrum circuli circulum B E Δ contingentis ipsique B Γ æquidistantis. Est igitur ratio arcus Δ E ad Γ H minor dictis rationibus; adeoque invertendo, ratio Γ H ad Δ E major est ratione diametri circuli contingentis circulum B Δ, ad diametrum circuli per E transeuntis & plano circuli B H Γ æquidistantis. Q. E. D.

Si vero punctum Λ *cadat inter* Δ *&* K, *res manifesta est.*

Ostendimus igitur quomodo se res habet, quæcunque fuerit ratio arcuum Γ H ad Δ E, sive majoris ad minus, sive minoris ad majus.

Constat etiam ex jam dictis, quod si punctum Δ fuerit terminus quadrantis B Δ, ratio arcus Γ H ad Δ E minor erit ratione diametri Sphæræ ad diametrum circuli tangentis circulum B E Δ, ipsique B H Γ æquidistantis; major vero ratione diametri Sphæræ ad diametrum circuli eidem æquidistantis & per punctum E transeuntis.

Unde si terminus quadrantis fuerit inter puncta Δ, E, & arcus Δ E bifariam divisus fuerit; ratio arcus Γ H ad arcum Δ E & minor erit & major rationibus illis.

Si vero terminus quadrantis non fuerit medio loco inter puncta Δ, E, erit ratio arcus Γ H ad Δ E minor ratione diametri Sphæræ ad diametrum circuli contingentis B Δ E planoque B H Γ æquidistantis; major vero ratione diametri Sphæræ ad diametrum circuli eidem plano æquidistantis, qui vel per punctum Δ vel Z transit, quod scilicet remotius fuerit à puncto termini quadrantis.

Coroll. *Arcu igitur* B Γ *motu æquabili describi supposito, momenta arcus* B Δ *erunt ubique ut quadrata sinuum distantiarum à polo* Z. *Unde etiam constabunt ea omnia, quæ in Prop. XII^{ma} plenius demonstrasse oportuit.*

F I N I S.